第 2 章§ 1 関数の変動

p.59 練習問題 1-A

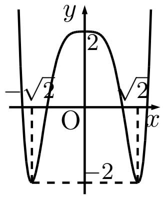
1. (1) $y=x^3+x=f(x)$ とおくと $f'(x)=3x^2+1,\ x=1$ のとき $y=f(1)=2, f'(1)=4$ よって

求める接線の方程式は $y-2=4(x-1)$ より $y=4x-2$

(2) 求める法線の方程式は $y-2=-\dfrac{1}{4}(x-1)$ より $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{9}{4}$

2. (1) $y'=6x^5-12x^3=6x^3(x^2-2),\ y'=0\to x=0, x^2=2$ よって $x=0,\pm\sqrt{2}$

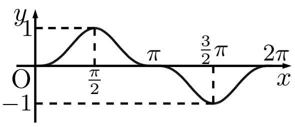
x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$



極大値 $2\ (x=0)$, 極小値 $-2\ (x=\pm\sqrt{2})$

(2) $y'=3\sin^2 x\cos x,\ y'=0\to \sin x=0, \cos x=0$ よって $x=0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi, 2\pi$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0



極大値 $1\ \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$, 極小値 $-1\ \left(x=\dfrac{3}{2}\pi\right)$

3. (1) $y'=15x^4-15x^2=15x^2(x-1)(x+1),\ y'=0\to x=0,\pm 1$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'	0	$-$	0	$-$	0	$+$	$+$
y	3	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	57

最大値 $57\ (x=2)$, 最小値 $-1\ (x=1)$

(2) $y'=2x-\dfrac{8}{x}=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x},\ y'=0\to x=\pm 2$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	e
y'	0	$-$	0	$+$	$+$
y	1	$\searrow$	$4-8\log 2$	$\nearrow$	e^2-8

最大値 $1\ (x=1)$, 最小値 $4-8\log 2\ (x=2)$

(3) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2},\ y'=0\to x=0$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

最大値 $-1\ (x=0)$, 最小値 なし

4. (1) $V=x(12-2x)^2\ (0<x<6)$

(2) $V'=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6),\ y'=0\to x=2,6$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$x=2$ のとき V は最大

5. (1) $V=\dfrac{\pi}{4}x(4a^2-x^2)\ (0<x<2a)$

(2) $V'=\dfrac{\pi}{4}(4a^2-3x^2),\ y'=0\to x=\pm\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$2a$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	$\nearrow$	最大	$\searrow$	

$x=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$ のとき V は最大

6. $f(x)=x-e\log x$ とおくと $f'(x)=1-\dfrac{e}{x},\ f'(x)=0\to x=e$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
V'		$-$	0	$+$
V	／	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より $x>0$ のとき $f(x)=x-e\log x \geqq 0$ よって $x>0$ のとき $x \geqq e\log x$

7. (1) $\dfrac{0}{0}$ の不定形. ロピタルの定理より 与式 $=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2x+2}=\frac{1}{2}$

   (2) $\dfrac{0}{0}$ の不定形. ロピタルの定理より 与式 $=\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\pi\cos\pi x}{1}=-\pi$

   (3) $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形. ロピタルの定理より与式 $=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0$

p.60 練習問題 1-B

1. 接点の座標を (t,t^2) とおくと $y'=2x$ より接線の方程式は $y-t^2=2t(x-t)$. よって $y=2tx-t^2$. これが点 $(-1,-3)$ を通るから $-3=-2t-t^2$. $t^2+2t-3=0,\ (t+3)(t-1)=0,\ t=-3,1$ よって接線の方程式は $t=1$ のとき $y=2x-1,\ t=-3$ のとき $y=-6x-9$

2. 直円柱の表面積 S は $S=2\pi r^2+2\pi rx$. 体積 1 より $\pi r^2x=1$ だから $x=\dfrac{1}{\pi r^2}\cdots$①. よって $S=2\pi r^2+\dfrac{2}{r}$. $\dfrac{dS}{dr}=4\pi r-\dfrac{2}{r^2}$. S 最小となるとき $\dfrac{dS}{dr}=0$ だから $2\pi r^3=1\cdots$②. ①, ②より $\dfrac{x}{r}=\dfrac{1}{\pi r^3}=2$

3. $y'=1-\dfrac{a}{x^2},\ y'=0\to x^2=a$ よって $x=\pm\sqrt{a}$. y,y' とも $x=0$ で値をもたないから

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-2\sqrt{a}$	$\searrow$	／	$\searrow$	$2\sqrt{a}$	$\nearrow$

極大値 $-2\sqrt{a}\ (x=-\sqrt{a})$, 極小値 $2\sqrt{a}\ (x=\sqrt{a})$

極小値が 6 となるのは $2\sqrt{a}=6$ よって $a=9$

4. (1) $y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3),\ y'=0\to x=-1,3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$

極大値 $5\ (x=-1)$, 極小値 $-27\ (x=3)$

   (2) $y=x^3-3x^2-9x$ と $y=k$ の共有点の個数と同じだから $k<-27, k>5$ のとき 1 個, $k=-27,5$ のとき 2 個, $-27<k<5$ のとき 3 個

5. $\mathrm{P}\left(t,\dfrac{a}{t}\right)$ とおくと $y'=-\dfrac{a}{x^2}$ より点 P における接線の方程式は $y-\dfrac{a}{t}=-\dfrac{a}{t^2}(x-t)$. よって $y=-\dfrac{a}{t^2}x+\dfrac{2a}{t}\cdots$①

   x 軸 $(y=0)$ との交点 A は $y=0$ を①に代入して $-\dfrac{a}{t^2}x+\dfrac{2a}{t}=0$. よって $x=2t,\ \ \mathrm{A}(2t,0)$

   y 軸 $(x=0)$ との交点 B は $x=0$ を①に代入して $y=\dfrac{2a}{t}\ \ \mathrm{B}\left(0,\dfrac{2a}{t}\right)$

   AB の中点の座標は $\left(\dfrac{2t+0}{2},\dfrac{0+\frac{2a}{t}}{2}\right)$. よって $\left(t,\dfrac{a}{t}\right)$. つまり点 P は AB の中点で PA=PB

6. (1) $y'=\dfrac{1}{x}$ より点 P における接線の方程式は $y-\log t=\dfrac{1}{t}(x-t)$. よって $y=\dfrac{x}{t}-1+\log t$.

   x 軸 $(y=0)$ との交点 A は $y=0$ より $\dfrac{x}{t}-1+\log t=0$. よって $x=t(1-\log t),\ \ \mathrm{A}(t(1-\log t),0)$

   y 軸 $(x=0)$ との交点 B は $x=0$ より $y=-1+\log t\ \ \mathrm{B}(0,-1+\log t)$. $0<t<1$ より $\log t<0$ だから

   $\mathrm{OA}=|t(1-\log t)|=t(1-\log t)$, $\mathrm{OB}=|-1+\log t|=1-\log t$. $S=\dfrac{1}{2}t(1-\log t)^2$

   (2) S が最大になるとき $\dfrac{dS}{dt}=0$ だから $\dfrac{dS}{dt}=(t)'(1-\log t)^2+t\{(1-\log t)^2\}'$

   $=(1-\log t)^2+2t(1-\log t)\left(-\dfrac{1}{t}\right)=(1-\log t)(-1-\log t)=0$. よって $\log t=\pm 1,\ t=e,\dfrac{1}{e}$

   $0<t<1$ より $t=\dfrac{1}{e}$. $\ \mathrm{P}\left(\dfrac{1}{e},-1\right)$