第 4 章§ 1 面積・曲線の長さ・体積

p.125 練習問題 1-A

1. (1) $\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 - 2x + 2 \end{cases}$ より 2 つの放物線の交点の x 座標は $x = \pm 1$. $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $-x^2-2x+2 \geqq x^2-2x$.

よって求める図形の面積 S は

$$S = \int_{-1}^{1} \{(-x^2 - 2x + 2) - (x^2 - 2x)\}dx = 2\int_{0}^{1}(-2x^2 + 2)dx = 4\left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = 4\left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8}{3}$$

(2) $\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4x \end{cases}$ より曲線と直線の交点の x 座標は $x = 0, \pm 2$. $-2 \leqq x \leqq 0$ のとき $x^3 \geqq 4x$,

$0 \leqq x \leqq 2$ のとき $x^3 \leqq 4x$. よって求める図形の面積 S は

$$S = \int_{-2}^{0}(x^3 - 4x)dx + \int_{0}^{2}(4x - x^3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 0 - (4 - 8) + 8 - 4 = 8$$

2. (1) $y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$. よって $x = 1$ のとき $y = \frac{1}{2}$. よって求める接線の方程式は $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

(2) $S = \int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \sqrt{x}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$

3. y ’$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$ よって $\ell = \int_{a}^{b}\sqrt{1 + (y')^2}dx = \int_{0}^{3}\sqrt{1 + (x^{\frac{1}{2}})^2}dx = \int_{0}^{3}\sqrt{1 + x}dx = \left[\frac{2}{3}(1 + x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$= \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{14}{3}$

4. 切り口の断面積は $S(x) = \frac{1}{2}\pi x^2(1 - x)^2$ よって立体の体積は $V = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}x^2(1 - x)^2dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}(x^2 - 2x^3 + x^4)dx$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{60}$$

5. (1) $V = \pi\int_{0}^{2}(e^x)^2dx = \pi\int_{0}^{2}e^{2x}dx = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}(e^4 - 1)$

(2) $V = \pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2dx = 2\pi\int_{0}^{1}\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2dx = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{1}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{\pi}{4}(e^2 + 4 - e^{-2})$$

6. (1) 楕円は $-a \leqq x \leqq a$ の範囲にあるので $V = \pi\int_{-a}^{a}y^2dx$. $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ より $y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_{0}^{a}(a^2 - x^2)dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

(2) y 軸との交点は $(0, r)$, x 軸との交点は $0 = r - \frac{r}{h}x$ より $x = h$ だから $(h, 0)$ $\quad V = \pi\int_{0}^{h}\left(r - \frac{r}{h}x\right)^2dx$

$$= \pi r^2\int_{0}^{h}\left(1 - \frac{2x}{h} + \frac{x^2}{h^2}\right)dx = \pi r^2\left[x - \frac{x^2}{h} + \frac{x^3}{3h^2}\right]_0^h = \pi r^2\left(h - \frac{h^2}{h} + \frac{h^3}{3h^2}\right) = \frac{\pi r^2h}{3}$$

p.126 練習問題 1-B

1. $y' = 2x - 1$. $\quad x = 0$ のとき $y' = -1$ よって $(0, 0)$ における接線の方程式は $y = -x$.

$x = 2$ のとき $y' = 3$ よって $(2, 2)$ における接線の方程式は $y - 2 = 3(x - 2), y = 3x - 4$. $\begin{cases} y = -x \\ y = -3x + 4 \end{cases}$ より

2 つの接線の交点の x 座標は $x = 1$. $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^2 - x \geqq -x$. $1 \leqq x \leqq 2$ のとき $x^2 - x \geqq 3x - 4$.

$$S = \int_{0}^{1}\{x^2 - x - (-x)\}dx + \int_{1}^{2}\{x^2 - x(3x - 4)\}dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \left(\frac{8}{3} - 8 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 4\right) = \frac{2}{3}$$

2. (1) $y' = x - \frac{1}{4x}$, $\quad \ell = \int_{1}^{2}\sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2}dx = \int_{1}^{2}\sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}dx = \int_{1}^{2}\sqrt{x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16x^2}}dx$

$= \int_1^2 \sqrt{\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2} dx = \int_1^2 \left(x+\frac{1}{4x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\log|x|\right]_1^2 = \frac{3}{2}+\frac{1}{4}\log 2$

(2) $y' = x$. p.108 問 16 より $\ell = \int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+1}+\log\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|\right]_0^2$

$= \frac{1}{2}\{2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})-\log 1\} = \sqrt{5}+\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})$

(3) $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}, y' = x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}},\quad \ell = \int_1^4 \sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int_1^4 \sqrt{1+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{16}x^{-1}}dx$

$= \int_1^4 \sqrt{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}x^{-1}}dx = \int_1^4 \sqrt{\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2}dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$

$= \frac{16}{3}+1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2} = \frac{31}{6}$

3. 点 A, B, P の x 座標を $-a, a, x$ とおくと $\mathrm{CD} = 2\sqrt{a^2-x^2}$,$\mathrm{CE} = \mathrm{DE} = \sqrt{2(a^2-x^2)}$. よって P における断面積 $\triangle\mathrm{CDE} = \frac{1}{2}(\sqrt{2(a^2-x^2)})^2 = a^2-x^2$. $\quad \mathrm{V} = \int_{-a}^a (a^2-x^2)dx = 2\int_0^a (a^2-x^2)dx = 2\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$

$= 2\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}a^3$

4. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$ より $x = 0, 1$. $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $x^2 < x$ で断面は半径 x の円と半径 x^2 の円の間の部分. よって

断面積 $S(x) = \pi x^2-\pi x^4$. $\quad$ 立体の体積は $V = \pi\int_0^1 (x^2-x^4)dx = \pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{15}\pi$

5. $x^2+(y-b)^2 = a^2$ より $y = b\pm\sqrt{a^2-x^2}$. $\quad$ 断面は半径 $b+\sqrt{a^2-x^2}$ の円と半径 $b-\sqrt{a^2-x^2}$ の円の間の部分.

よって断面積 $S(x) = \pi(b+\sqrt{a^2-x^2})^2-\pi(b-\sqrt{a^2-x^2})^2$

$= \pi\{b^2+2b\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2-(b^2-2b\sqrt{a^2-x^2}+a^2-x^2)\} = 4\pi b\sqrt{a^2-x^2}$, p.107 例題 12 より回転体の体積は $V = 4\pi b\int_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}dx = 8b\pi\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = 8\pi b\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = 4\pi a^2 b\sin^{-1}1$

$= 2\pi^2a^2b$

6. 巻末解答の図より $V = \pi\int_0^{\frac{r}{2}}\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 dx = \pi\int_0^{\frac{r}{2}}(r^2-x^2)dx = \pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{r}{2}} = \pi\left(\frac{r^3}{2}-\frac{r^3}{24}\right) = \frac{11}{24}\pi r^3$