p.24. 練習問題 1-A

1. (1) $f(x) = \log x, f'(x) = \dfrac{1}{x}$. $f(1) = \log 1 = 0, f'(1) = 1$.

よって $f(x) \fallingdotseq f(1) + f'(1)(x-1) = 0 + 1 \cdot (x-1) = x - 1$. $\log x \fallingdotseq \underline{x-1}$.

(2) $f(x) = \sin 2x, f'(x) = 2\cos 2x$. $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin\pi = 0, f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2\cos\pi = -2$.

よって $f(x) \fallingdotseq f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 - 2\cdot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = -2x + \pi$. $\sin 2x \fallingdotseq \underline{-2x+\pi}$.

(3) $f(x) = \tan x, f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. $f(0) = \tan 0 = 0, f'(0) = \dfrac{1}{\cos^2 0} = 1$.

よって $f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1\cdot x = x$. $\tan x \fallingdotseq \underline{x}$.

(4) $f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}, f'(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$. $f(0) = e^0 = 1, f'(0) = \dfrac{1}{2}e^0 = \dfrac{1}{2}$.

よって $f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + \dfrac{1}{2}x$. $\sqrt{e^x} \fallingdotseq \underline{1 + \dfrac{1}{2}x}$.

2. (1) $f'(x) = \{(1-x)^{\frac{1}{2}}\}' = \dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)' = -\dfrac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$,

$f''(x) = -\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}(1-x)' = -\dfrac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$. $f(0) = 1, f'(0) = -\dfrac{1}{2}, f''(0) = -\dfrac{1}{4}$.

よって $f(x) \fallingdotseq f(0) + f'(1)(x-0) + \dfrac{f''(0)}{2}(x-0)^2 = 1 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)x + \dfrac{-\frac{1}{4}}{2}x^2 = \underline{1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2}$.

(2) $\sqrt{0.8} = \sqrt{1-0.2} = f(0.2) \fallingdotseq 1 - \dfrac{1}{2}\cdot 0.2 - \dfrac{1}{8}\cdot(0.2)^2 = 1 - 0.1 - 0.005 = \underline{0.895}$.

3. (1) $f'(x) = (x+1)'\log x + (x+1)(\log x)' - 2x = \log x + \dfrac{x+1}{x} - 2x = \log x + 1 + \dfrac{1}{x} - 2x,\ f'(1) = \log 1 + 1 + 1 - 2 = 0$.

(2) $f''(x) = \dfrac{1}{x} + 0 + (x^{-1})' - 2 = \dfrac{1}{x} - x^{-2} - 2 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} - 2,\ f''(1) = 1 - 1 - 2 = -2 < 0$. よって

$f(x)$ は $x = 1$ で極小. (p.7 極値をとるための十分条件参照)

4. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-5}{n-2n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{1}{n}-2} = \underline{-\frac{1}{2}}$ (収束).

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1-n)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \underline{\frac{1}{2}}$. (収束)

(3) $a_n = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$. 公比 $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ の等比数列. $r > 1$ より ∞ に発散. (p.10 参照)

(4) 公比 $r = \dfrac{2}{1+\sqrt{3}} = \dfrac{2(1-\sqrt{3})}{1-3} = \sqrt{3}-1$ の等比数列. $0 < r < 1$ より $\underline{0}$ に収束. (p.10 参照)

5. 初項 $a = \dfrac{2}{3}$, 公比 $r = -\dfrac{2}{3}$. $|r| < 1$ より収束. 和は $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{\frac{2}{3}}{1-(-\frac{2}{3})} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \underline{\dfrac{2}{5}}$. (p.14 参照)

6. (1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}, f'(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}, f''(x) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\sin\dfrac{x}{2}, f'''(x) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\cos\dfrac{x}{2}, \cdots$.

$f(0) = 0, f'(0) = \dfrac{1}{2}, f''(x) = 0, f'''(0) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)^3, \cdots$.

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ より

$\sin\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2^3 3!}x^3 + \cdots + (-1)^n\dfrac{1}{2^{2n+1}(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$. (p.5 参照)

(2) $f(x) = \cos 2x, f'(x) = -2\sin 2x, f''(x) = -2^2\cos 2x, f'''(x) = 2^3\sin 2x, \cdots$.

$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(x) = -2^2, f'''(0) = 0, \cdots$.

$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$ より

$\cos 2x = 1 - \dfrac{2^2}{2!}x^2 + \dfrac{2^4}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n\dfrac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$. (p.5 参照)

(3) $f(x) = e^{2x}, f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = -2^2e^{2x}, f'''(x) = 2^3e^{2x}, \cdots$.

$f(0)=1, f'(0)=2, f''(x)=2^2, f'''(0)=2^3, \cdots.$

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ より

$e^{2x}=1+2x+\dfrac{2^2}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{2^n}{n!}x^n+\cdots.$

7. $y'=\lambda e^{\lambda x}, y''=\lambda^2 e^{\lambda x}$. $y''+y'+y=0$ より $\lambda^2 e^{\lambda x}+\lambda e^{\lambda x}+e^{\lambda x}=e^{\lambda x}(\lambda^2+\lambda+1)=0$. よって $\lambda^2+\lambda+1=0$ より $\underline{\lambda=}\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\underline{\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$.

p.25. 練習問題 1-B

1. (1) $f'(x)=1-(e^x)'\cos x-e^x(\cos x)'=1+e^x(\sin x-\cos x)$,

$f''(x)=(e^x)'(\sin x-\cos x)+e^x(\sin x-\cos x)'=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)=2e^x\sin x$,

$f'''(x)=2(e^x)'\sin x+2e^x(\sin x)'=2e^x(\sin x+\cos x)$. $\underline{f'(0)=0, f''(0)=0, f'''(0)=2}$.

(2) (1) より $f(x)=f(0)+f'(0)(x-0)+\dfrac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\dfrac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3+o((x-0)^3)=f(0)+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$f(0)=-1$ より $\underline{f(x)=-1+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)}$.

(3) (2) より $f(x)=-1+x^3\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}\right)$. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{o(x^3)}{x^3}=0$ より $|x|$ が十分小さいとき $\dfrac{1}{3}+\dfrac{o(x^3)}{x^3}>0$.

$x>0$ のとき $x^3>0$ だから $f(x)>-1$. $x<0$ のとき $x^3<0$ だから $f(x)<-1$. よって $x=0$ の近くに $f(x)>-1$ となる点も $f(x)<-1$ となる点も存在する. よって $f(0)=-1$ は極大値でも極小値でもない. よって $f(x)$ は $x=0$ で極値をとらない.

2. n 次近似式より $f(x)=f(a)+\dfrac{f^{(n)}}{a}n!(x-a)^n+o((x-a)^n)=f(a)+(x-a)^n\left(\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}+\dfrac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}\right)$.

$\displaystyle\lim_{x\to a}\dfrac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}=0$ より $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}+\dfrac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}$ は $f^{(n)}(a)$ と同符号.

(1) n が奇数より $x>a$ のとき $(x-a)^n>0, x<a$ のとき $(x-a)^n<0$. よって $x=a$ の近くに $f(x)>f(a)$ となる点も $f(x)<f(a)$ となる点も存在する. よって $f(x)$ は $x=a$ で極値をとらない.

(2) n が偶数より $(x-a)^n>0$. よって $f^{(n)}(a)>0$ のとき $x=a$ の近くで常に $f(x)>f(a)$. よって $f(x)$ は $x=a$ で極小値 $f(a)$ をとる. $f^{(n)}(a)<0$ のとき $x=a$ の近くで常に $f(x)<f(a)$. よって $f(x)$ は $x=a$ で極大値 $f(a)$ をとる. よって $f(x)$ は $x=a$ で極値をとる.

3. (1) $r^n\to\infty$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2r^n}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\frac{1}{r^n}}=\underline{2}$. (2) $\dfrac{2r^n}{r^n+1}=\dfrac{2}{1+1}=1$. よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2r^n}{r^n+1}=\underline{1}$

(3) $r^n\to 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2r^n}{r^n+1}=\underline{0}$. (4) $|r|\to\infty$ より (1) と同様にして $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\dfrac{2r^n}{r^n+1}=\underline{2}$.

4. $\mathrm{A_1B_1}=\mathrm{OA}\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}a$. $\mathrm{B_1A_2}=\mathrm{A_1B_1}\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$. $\mathrm{A_2B_2}=\mathrm{B_1A_2}\cos 30^\circ=\dfrac{3}{8}a$. 以下同様にして

$\mathrm{A_1B_1}+\mathrm{B_1A_2}+\mathrm{A_2B_2}+\mathrm{B_2A_2}+\cdots$ は初項 $\dfrac{1}{2}a$, 公比 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の等比級数. $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|<1$ より収束し,

和は $\dfrac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{a}{2-\sqrt{3}}=\dfrac{a(2+\sqrt{3})}{4-3}=\underline{(2+\sqrt{3})a}$.

5. ドモアブルの定理 $(n=3)$ より $(\cos x+i\sin x)^3=\cos 3x+i\sin 3x$.

左辺 $=(\cos x)^3+3(\cos x)^2 i\sin x+3\cos x(i\sin x)^2+(i\sin x)^3=\cos^3 x+3i\sin x\cos^2 x+3i^2\sin^2 x\cos x+i^3\sin^3 x$

$=\cos^3 x+3i\sin x\cos^2 x-3\sin^2 x\cos x-i\sin^3 x=\cos x(\cos^2 x-3\sin^2 x)+i\sin x(3\cos^2 x-\sin^2 x)$.

よって $\cos 3x=\cos x(\cos^2 x-3\sin^2 x)\cdots$①$, \sin 3x=\sin x(3\cos^2 x-\sin^2 x)\cdots$②. ①と $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ より

$\underline{\cos 3x=}\cos x\{\cos^2 x-3(1-\cos^2 x)\}=\cos x(4\cos^2 x-3)=\underline{4\cos^3 x-3\cos x}$. ②と $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ より

$\underline{\sin 3x=}\sin x\{3(1-\sin^2 x)-\sin^2 x\}=\sin x(3-4\sin^2 x)=\underline{3\sin x-4\sin^3 x}$.