第 2 章 § 2 偏微分の応用

p.57 練習問題 2-A

1. (1) $z_x = 3x^2 + 2xy,\ z_y = x^2 + 3y^2,\ z_{xx} = 6x + 2y,\ z_{xy} = 2x = z_{yx},\ z_{yy} = 6y$

(2) $z = yx^{-1},\ z_x = y(x^{-1})' = -yx^{-2} = -\dfrac{y}{x^2},\ z_y = (y)'x^{-1} = x^{-1} = \dfrac{1}{x},$

$z_{xx} = -y(x^{-2})' = 2yx^{-3} = \dfrac{2y}{x^3},\ z_{xy} = -(y)'x^{-2} = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2} = z_{yx},\ z_{yy} = (x^{-1})_y = 0$

(3) $z = (2x^2 + 3y^2)^{\frac{1}{2}},\ z_x = \dfrac{1}{2}(2x^2 + 3y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x^2 + 3y^2)_x = \dfrac{1}{2(2x^2 + 3y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 4x = \dfrac{2x}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}},$

$z_y = \dfrac{1}{2}(2x^2 + 3y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x^2 + 3y^2)_y = \dfrac{1}{2(2x^2 + 3y^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot 6y = \dfrac{3y}{\sqrt{2x^2 + 3y^2}},$

$z_{xx} = \dfrac{(2x)'\sqrt{2x^2 + 3y^2} - 2x(\sqrt{2x^2 + 3y^2})_x}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^2} = \dfrac{2\sqrt{2x^2 + 3y^2} - 2x\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3y^2}}}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^2} = \dfrac{2(2x^2 + 3y^2) - 4x^2}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^3}$

$= \dfrac{6y^2}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^3}$

$z_{xy} = 2x((2x^2{+}3y^2)^{-\frac{1}{2}})_y = 2x{\cdot}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(2x^2{+}3y^2)^{-\frac{3}{2}}(2x^2{+}3y^2)_y = -x{\cdot}(2x^2{+}3y^2)^{-\frac{3}{2}}6y = -\dfrac{6xy}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^3}$

$= z_{yx}$

$z_{yy} = \dfrac{(3y)'\sqrt{2x^2 + 3y^2} - 3y(\sqrt{2x^2 + 3y^2})_y}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^2} = \dfrac{3\sqrt{2x^2 + 3y^2} - 3y\frac{3y}{\sqrt{2x^2+3y^2}}}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^2} = \dfrac{3(2x^2 + 3y^2) - 9y^2}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^3}$

$= \dfrac{6x^2}{(\sqrt{2x^2 + 3y^2})^3}$

(4) z_x は $y = b($ 定数 $)$ として微分し $b = y$ に戻す. $z_x = (x^b)' = bx^{b-1} = yx^{y-1}$.

z_y は $x = a($ 定数 $)$ として微分し $a = x$ に戻す. $z_y = (a^y)' = a^y \log a = x^y \log x$

(ここで p. 176 指数関数の微分 $(a^x) = a^x \log a$).

z_{xx} は z_x と同様に $z_{xx} = (z_x)_x = (yx^{y-1})_x = (bx^{b-1})' = b(b-1)x^{b-2} = y(y-1)x^{y-2}$

z_{xy} は z_y と同様に $z_{xy} = (z_x)_y = (yx^{y-1})_y = (ya^{y-1})' = a^{y-1} + ya^{y-1}\log a$

$= (1 + y\log a)a^{y-1} = (1 + y\log x)x^{y-1}$

z_{yy} も z_y と同様に $z_{yy} = (z_y)_y = (x^y \log x)_y = (a^y \log a)' = a^y(\log a)^2 = x^y(\log x)^2$

2. $z_x = ((x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}})_x = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(x^2 + y^2)_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. 同様に $z_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$z_{xx} = \dfrac{(x)'\sqrt{x^2 + y^2} - x(\sqrt{x^2 + y^2})_x}{(\sqrt{x^2 + y^2})^2} = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2 + y^2} = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$z_{xy} = x((x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}})_y = -\dfrac{1}{2}x(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}(x^2 + y^2)_y = -\dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

z_{yy} は z_{xx} と同様に $z_{yy} = \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$

(1) 左辺 $= \sqrt{x^2 + y^2}\left(\dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \dfrac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 1 =$ 右辺

(2) 左辺 $= \left(-\dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 = \dfrac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3}$. 右辺 $= \dfrac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \dfrac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x^2y^2}{(x^2 + y^2)^3}$

よって左辺 $=$ 右辺

3. (1) $z_x = 4x^3 + 32 = 0, z_y = 3y^2 - 9 = 0$. よって $x = -2, y = \pm\sqrt{3},\ z_{xx} = 12x^2, z_{xy} = 0, z_{yy} = 6y$.

よって $(x, y) = (-2, \sqrt{3})$ のとき $H = 48 \cdot 6\sqrt{3} - 0 > 0, z_{xx} = 48 > 0$ だから極小

$(x, y) = (-2, -\sqrt{3})$ のとき $H = 48 \cdot (-6\sqrt{3}) - 0 < 0$ だから極値をとらない.

よって点 $(-2, \sqrt{3})$ で極小値 $-48 - 6\sqrt{3}$.

(2) $z_x=-6x+2\sqrt{y}+8=0\cdots①, z_y=\dfrac{x}{\sqrt{y}}-1=0\cdots②$. ②より $\sqrt{y}=x$. ①に代入 $-4x+8=0, x=2$.

よって $\sqrt{y}=2, y=4$. $z_{xx}=-6, z_{xy}=\dfrac{1}{\sqrt{y}}, z_{yy}=-\dfrac{x}{2y\sqrt{y}}$.

点 $(2,4)$ のとき $z_{xx}=-6, z_{xy}=\dfrac{1}{2}, z_{yy}=-\dfrac{1}{8}, H=z_{xx}z_{yy}-(z_{xy})^2=\dfrac{1}{2}>0, z_{xx}<0$. よって極大

よって点 $(2,4)$ で極大値 4.

4. $\varphi(x,y)=x^2+4y^2-4, \varphi_x=2x, \varphi_y=8y$.

(1) $f(x,y)=x+2y, f_x=1, f_y=2$. よって $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}$ より $\dfrac{1}{2x}=\dfrac{2}{8y}, x=2y$. よって $\varphi=0$ に代入して

$8y^2=4, y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{2}$(復号同順). $(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}\right)$ のとき $z=2\sqrt{2}$,

$(x,y)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\sqrt{2}\right)$ のとき $z=-2\sqrt{2}$. よって最大値 $2\sqrt{2}$, 最小値 $-2\sqrt{2}$.

(2) $f(x,y)=xy, f_x=y, f_y=x$. よって $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}$ より $\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x}{8y}, x=\pm2y$. よって $\varphi=0$ に代入して

$8y^2=4, y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}, x=\pm\sqrt{2}$. $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\pm\sqrt{2}\right)$ のとき $z=1$,

$(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\mp\sqrt{2}\right)$ のとき $z=-1$. よって最大値 1, 最小値 -1.

5. (1) $f(x,y,z)=xyz-a^3$ とおくと $f_x=yz, f_y=xz, f_z=xy$. よって点 P において $f_x=y_0z_0, f_y=x_0z_0$,

$f_z=x_0y_0$. P における接平面の方程式は $y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$,

$y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$. P は曲面上の点だから $x_0y_0z_0=a^3$.

よって求める接平面の方程式は $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3a^3$.

(2) (1) の接平面と x 軸 $(y=z=0)$ との交点は $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3a^3, y=z=0$ より $y_0z_0x=3a^3$.

$x_0y_0z_0=a^3$ だから $x=3x_0$ で交点の座標は $(3x_0,0,0)$. 同様に y 軸,z 軸との交点の座標は

それぞれ $(0,3y_0,0),(0,0,3z_0)$. 三角錐の体積は $\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{2}\cdot3x_0\cdot3y_0)\times3z_0=\dfrac{9}{2}x_0y_0z_0=\dfrac{9}{2}a^3$.

6. 半径を r, 高さを h とすると表面積 $S=2\pi r^2+2\pi rh$(一定). よって $\varphi=2\pi r^2+2\pi rh-S$. 体積 $V=\pi r^2h$.

$\varphi_r=4\pi r+2\pi h, \varphi_h=2\pi r, V_r=2\pi rh, V_h=\pi r^2$. $\dfrac{V_r}{\varphi_r}=\dfrac{V_h}{\varphi_h}$ より $\dfrac{2\pi rh}{4\pi r+2\pi h}=\dfrac{\pi r^2}{2\pi r}, \dfrac{rh}{2r+h}=\dfrac{r}{2}$.

$2rh=2r^2+rh, h=2r$. よって $r:h=r:2r=1:2$.

7. $f(x,y,\alpha)=x+2\alpha y-2\alpha^3=0\cdots①, f_\alpha=2y-6\alpha^2=0\cdots②$. ②より $y=3\alpha^2\cdots③$.

③を①に代入して $x+6\alpha^3-2\alpha^3=0, x=-4\alpha^3\cdots④$. ③より $y^3=(3\alpha^2)^3, 8y^3=27\alpha^6$.

④より $x^2=(-4\alpha^3)^2=16\alpha^6$. よって $16y^3=27x^2$.

p.93 練習問題 2-B

1. $f(x,y)=0$ よって定まる陰関数 $y=\varphi(x)$ の点 P における接線の方程式は $y-y_0=\varphi'(x_0)(x-x_0)$.

$\varphi'(x)=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{f_x}{f_y}$ だから, この接線の方程式は $y-y_0=-\dfrac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$,

すなわち $f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$.

2. (1) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$ とおくと $f_x=\dfrac{2x}{a^2}, f_y=\dfrac{2y}{b^2}$. $f_x(x_0,y_0)=\dfrac{2x_0}{a^2}, f_y(x_0,y_0)=\dfrac{2y_0}{b^2}$.

1 より $\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)=0, \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}$. 点 P は曲線上にあるから $\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$.

よって $\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-1$ とおくと $f_x=\dfrac{2x}{a^2}, f_y=-\dfrac{2y}{b^2}$. $f_x(x_0,y_0)=\dfrac{2x_0}{a^2}, f_y(x_0,y_0)=-\dfrac{2y_0}{b^2}$.

1 より $\dfrac{2x_0}{a^2}(x-x_0)-\dfrac{2y_0}{b^2}(y-y_0)=0, \dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}$. 点 P は曲線上にあるから $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$.

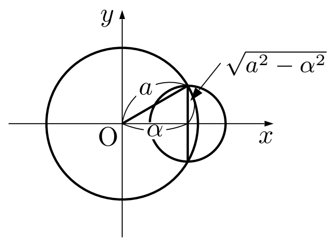
よって $\dfrac{x_0x}{a^2}-\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

(3) $f(x,y)=y^2-4px$ とおくと $f_x=-4p, f_y=2y$. $f_x(x_0,y_0)=-4p, f_y(x_0,y_0)=2y_0$.

1 より $-4p(x-x_0)+2y_0(y-y_0)=0, y_0y-y_0^2=2px-2px_0$. 点 P は曲線上にあるから $y_0^2=4px_0$.

よって $y_0y-4px_0=2px-2px_0, y_0y=2px+2px_0$. 従って $y_0y=2p(x+x_0)$.

3. 弦と x 軸の交点の x 座標を α とすると, この弦を直径とする円の方程式は



$(x-\alpha)^2+y^2=\sqrt{a^2-\alpha^2}^2=a^2-\alpha^2$ だから曲線群の方程式は

$f(x,y,\alpha)=(x-\alpha)^2+y^2-a^2+\alpha^2$.

$f_\alpha=-2(x-\alpha)+2\alpha=0, \alpha=\dfrac{1}{2}x$. これを $f=0$ に代入して

$\left(x-\dfrac{1}{2}x\right)^2+y^2-a^2+\left(\dfrac{1}{2}x\right)^2=0, \dfrac{x^2}{2}+y^2=a^2$.

4. $\varphi(x,y,z)=0$ によって定まる陰関数により z は x,y の 2 変数関数になるから w も x,y の 2 変数関数になる. よって極値をとる点において $\dfrac{\partial w}{\partial x}=0, \dfrac{\partial w}{\partial y}=0$ だから $\dfrac{\partial w}{\partial x}=f_x+f_z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \dfrac{\partial w}{\partial y}=f_y+f_z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{\varphi_y}{\varphi_z}$ だから $f_x-f_z\dfrac{\varphi_x}{\varphi_z}=0, f_y-f_z\dfrac{\varphi_y}{\varphi_z}=0$. よって $f_x=\dfrac{f_z}{\varphi_z}\varphi_x, f_y=\dfrac{f_z}{\varphi_z}\varphi_y$.

ここで $\dfrac{f_z}{\varphi_z}=\lambda$ とおくと $f_x=\lambda\varphi_x, f_y=\lambda\varphi_y, f_z=\lambda\varphi_z$.

5. 直方体の体積だから $V=xyz$. x,y,z は $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}=1$ を満たすから

$\varphi(x,y,z)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{16}-1$ とおくと 4 より最大値をとる点において

$f_x=\lambda\varphi_x, f_y=\lambda\varphi_y, f_z=\lambda\varphi_z$ を満たす λ が存在する. $f_x=yz, f_y=xz, f_z=xy, \varphi_x=\dfrac{2x}{9}, \varphi_y=\dfrac{2y}{36}, \varphi_z=\dfrac{2z}{16}$ より

$yz=\dfrac{2x}{9}\lambda\cdots$①$, xz=\dfrac{y}{18}\lambda\cdots$②$, xy=\dfrac{z}{8}\lambda\cdots$③. ①×②より $xyz^2=\dfrac{xy}{81}\lambda^2$. $xy>0$ だから $z^2=\dfrac{\lambda^2}{81}$.

$z>0$ より $z=\dfrac{\lambda}{9}\cdots$④. 同様に $y=\dfrac{\lambda}{6}\cdots$⑤$, x=\dfrac{\lambda}{12}\cdots$⑥. これらを $\varphi=0$ に代入して

$\dfrac{\lambda^2}{36^2}+\dfrac{\lambda^2}{36^2}+\dfrac{\lambda^2}{36^2}=1, \dfrac{\lambda^2}{36^2}=\dfrac{1}{3}$. ④より $\lambda>0$ だから $\lambda=12\sqrt{3}$. ④,⑤,⑥より $x=\sqrt{3}, y=2\sqrt{3}, z=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$.

よって最大値は $V=xyz=8\sqrt{3}\left((x,y,z)=\left(\sqrt{3},2\sqrt{3},\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)\right)$