第 4 章　§ 1. 1 階微分方程式

p. 105 練習問題 1-A

1. (1) (変数分離形) $\frac{1}{x}dx = \frac{1}{t+1}dt \quad \log|x| - \log|t+1| = c \quad \frac{x}{t+1} = \pm e^c = C \quad x = C(t+1)$ (C は任意定数)

(2) (変数分離形) $\frac{x}{x^2-1}dx = \frac{1}{t}dt \quad \frac{1}{2}\log|x^2-1| - \log|t| = c \quad \frac{x^2-1}{t^2} = \pm e^{2c} = C \quad x^2 = Ct^2+1$ (C は任意定数)

(3) (同次形) $\frac{dx}{dt} = \frac{2(\frac{x}{t})^2-1}{2\frac{x}{t}} \quad \frac{x}{t} = u$ とおくと $\frac{dx}{dt} = u + t\frac{dx}{dt}$ $\therefore u + t\frac{dx}{dt} = u - \frac{1}{2u} \quad 2udu = -\frac{1}{t}dt$

$u^2 = -\log|t| + C, \quad u = \frac{x}{t}$ より $\frac{x^2}{t^2} = -\log|t| + C \quad x^2 = t^2(-\log|t|+C)$ (C は任意定数)

(4) (同次形) $\frac{dx}{dt} = 2\frac{x}{t} + 1 \quad \frac{x}{t} = u$ とおくと $\frac{dx}{dt} = u + t\frac{dx}{dt}$ $\therefore u + t\frac{dx}{dt} = 2u + 1 \quad \frac{1}{u+1}du = \frac{1}{t}dt$

$\log|u+1| - \log|t| = c \quad \frac{u+1}{t} = \pm e^c = C \quad u = \frac{x}{t}$ より $\frac{\frac{x}{t}+1}{t} = C \quad x = t(Ct-1)$ (C は任意定数)

(5) (1 階線形)(i) $\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \frac{1}{x}dx = -dt \quad \log|x| = -t + c \quad x = \pm e^{-t+c} = Ce^{-t}$

(ii) $x = ue^{-t}$ とおく $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}e^{-t} - ue^{-t}$. よって $\frac{du}{dt}e^{-t} - ue^{-t} + ue^{-t} = te^{-t} \quad \frac{du}{dt} = t \quad u = t^2 + C$

よって $x = (t^2+C)e^{-t}$ (C は任意定数)

(6) (1 階線形)(i) $\frac{dx}{dt} - \frac{x}{2t} = 0 \quad \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2t}dt \quad \log|x| - \frac{1}{2}\log|t| = c \quad \frac{x}{\sqrt{t}} = \pm e^c = C \quad x = C\sqrt{t}$

(ii) $x = u\sqrt{t}$ とおく $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\sqrt{t} + \frac{u}{2\sqrt{t}}$. よって $\frac{du}{dt}\sqrt{t} + \frac{u}{2\sqrt{t}} - \frac{u\sqrt{t}}{2t} = 1 \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}} \quad u = 2\sqrt{t} + C$

よって $x = (2\sqrt{t}+C)\sqrt{t} \quad x = 2t + C\sqrt{t}$ (C は任意定数).

2. (1) (変数分離形) $\frac{1}{x^2}dx = 4t^3dt \quad -\frac{1}{x} = t^4 + C \quad x = -\frac{1}{t^4+C}$ (C は任意定数). $t = 0$ のとき $x = 1$ より

$1 = -\frac{1}{C}$ $\therefore C = -1$. よって $x = -\frac{1}{t^4-1} = \frac{1}{1-t^4}$

(2) (変数分離形) $\frac{1}{x^2+1}dx = dt \quad \tan^{-1}x = t + C \quad x = \tan(t+C)$ (C は任意定数). $t = 0$ のとき $x = 1$ より

$1 = \tan C$ $\therefore C = \frac{\pi}{4}$. よって $x = \tan\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

(3) (同次形) $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x}{t}\right)^2 + \frac{x}{t} \quad \frac{x}{t} = u$ とおくと $\frac{dx}{dt} = u + t\frac{dx}{dt}$ $\therefore u + t\frac{dx}{dt} = u^2 + u \quad \frac{1}{u^2}du = \frac{1}{t}dt$

$-\frac{1}{u} = \log|t| + C, \quad u = \frac{x}{t}$ より $-\frac{t}{x} = \log|t| + C \quad x = -\frac{t}{\log|t|+C}$ (C は任意定数)

$t = 1$ のとき $x = \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2} = -\frac{1}{\log 1 + C}$ $\therefore C = -2$. よって $x = -\frac{t}{\log|t|-2} = \frac{t}{2-\log|t|}$

(4) (1 階線形)(i) $\frac{dx}{dt} + x\sin t = 0 \quad \frac{1}{x}dx = -\sin t dt \quad \log|x| = \cos t + c \quad x = \pm e^{\cos t + c} = Ce^{\cos t}$

(ii) $x = ue^{\cos t}$ とおく $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}e^{\cos t} - ue^{\cos t}\sin t$. よって $\frac{du}{dt}e^{\cos t} - ue^{\cos t}\sin t + ue^{\cos t}\sin t = e^{\cos t}$

$\therefore \frac{du}{dt} = 1 \quad u = t + C$ よって $x = (t+C)e^{\cos t}$ (C は任意定数). $t = \frac{\pi}{2}$ のとき $x = 0$ より $0 = \left(\frac{\pi}{2} + C\right)e^{\cos\frac{\pi}{2}}$.

よって $C = -\frac{\pi}{2}$. $\quad x = \left(t - \frac{\pi}{2}\right)e^{\cos t}$

3. (1) $\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{t}dt \quad \log|x| + \log|t| = c \quad xt = \pm e^c = C \quad x = \frac{C}{t}$ (C は任意定数).

(2) $x = \frac{u}{t}$ とおく $\frac{dx}{dt} = \frac{\frac{du}{dt}t - u}{t^2}$. よって $t\frac{\frac{du}{dt}t - u}{t^2} + \frac{u}{t} = \frac{t}{1+t^2}$

$\therefore \frac{du}{dt} = \frac{t}{1+t^2} \quad u = \frac{1}{2}\log(1+t^2) + C$ よって $x = \frac{1}{t}(\frac{1}{2}\log(1+t^2) + C)$ (C は任意定数).

4. $\frac{di}{dt} = -i + E \quad \frac{1}{i-E}di = -dt \quad \log|i-E| = -t + c \quad i - E = \pm e^{-t+c} = Ce^{-t}$ よって $i = E + Ce^{-t}$ (C は任意定数). $t = 0$ のとき $i = 0$ より $0 = E + C$.

よって $C = -E$. $\quad i = E - Ee^{-t} = E(1-e^{-t})$.

p. 106 練習問題 1-B

1. (1) $u^2 = 2t + x + 4$ よって $(u^2)' = (2t + x + 4)'$, $\quad 2uu' = 2 + x'$ すなわち $2u\dfrac{du}{dt} = 2 + \dfrac{dx}{dt}$, $\quad \dfrac{dx}{dt} = 2u\dfrac{du}{dt} - 2$.
これを微分方程式に代入して $2u\dfrac{du}{dt} - 2 = \sqrt{2t + x + 4} = u$. よって $2u\dfrac{du}{dt} = u + 2$.

   (2) (1) より $\dfrac{2u}{u+2}du = dt$. $\quad \left(2 - \dfrac{4}{u+2}\right)du = dt$ より $2u - 4\log|u + 2| = t + C$.
よって $2\sqrt{2t + x + 4} - 4\log|\sqrt{2t + x + 4} + 2| = t + C$ (C は任意定数).

2. (1) 微分方程式は $x = tx' + (x')^3$ と表せる. これを t について微分すると
$x' = (tx')' + \{(x')^3\}' = t'x' + tx'' + 3(x')^2(x')' = x' + tx'' + 3(x')^2x''$. つまり $x' = x' + x''(t + 3(x')^2)$. だから
$x''(t + 3(x')^2) = 0$. よって $\dfrac{d^2x}{dt^2}\left(t + 3\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2\right) = 0$

   (2) (1) より $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ または $t + 3\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = 0$.
$\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$ のとき両辺を t について積分して $\dfrac{dx}{dt} = C$. これをもとの微分方程式に代入して
$x = Ct + C^3$ (C は任意定数) (一般解)
$t + 3\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = 0$ のとき $\dfrac{dx}{dt} = \pm\sqrt{-\dfrac{t}{3}}$ 両辺を t について積分して $x = \mp 2\left(-\dfrac{t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ よって $x^2 = 4\left(-\dfrac{t}{3}\right)^3 =$
$-\dfrac{4}{27}t^3$ (特異解)

3. (1) $z = x^{-2}$. 両辺を t について微分して $z' = -2x^{-3}x'$. よって $x' = -\dfrac{x^3}{2}z'$ すなわち $\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{x^3}{2}\dfrac{dz}{dt}$.
微分方程式に代入して $-\dfrac{tx^3}{2}\dfrac{dz}{dt} - 2x = t^2x^3$. よって $t\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{4}{x^2} = -2t^2$. $\quad z = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ より
$t\dfrac{dz}{dt} + 4z = -2t^2$.

   (2) (i)$t\dfrac{dz}{dt} + 4z = 0$ より $\dfrac{1}{z}dz = -\dfrac{4}{t}dt$. $\quad \log|z| + 4\log|t| = c$. $\quad zt^4 = \pm e^c = C$. よって $z = \dfrac{C}{t^4}$
(ii)$z = \dfrac{u}{t^4}$ とおく. $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{1}{t^4}\dfrac{du}{dt} - \dfrac{4u}{t^5}$ これを微分方程式に代入して $\dfrac{1}{t^3}\dfrac{du}{dt} - \dfrac{4u}{t^4} + \dfrac{4u}{t^4} = -2t^2$
$\dfrac{du}{dt} = -2t^5$. $\quad u = -\dfrac{1}{3}t^6 + c$. よって $z = \dfrac{-t^6 + 3c}{3t^4}$. $\quad z = x^{-2}$ より $x^{-2} = \dfrac{-t^6 + C}{3t^4}$ ($3c = C$ とおいた)
$x^2 = \dfrac{3t^4}{-t^6 + C}$. よって $(-t^6 + C)x^2 = 3t^4$ (C は任意定数).

4. (1) $x = t$ のとき微分方程式の左辺 $= \dfrac{dx}{dt} + (2t^2 + 1)x - tx^2 = 1 + (2t^2 + 1)t - t^3 = t^3 + t + 1 =$ 右辺. よって
$x = t$ は微分方程式の解である.

   (2) $u = \dfrac{1}{x - t}$ より $x - t = \dfrac{1}{u}$. よって $x = t + \dfrac{1}{u} \cdots$①. また $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dt} \cdots$②
①, ②を微分方程式に代入して $1 - \dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dt} + (2t^2 + 1)\left(t + \dfrac{1}{u}\right) - t\left(t + \dfrac{1}{u}\right)^2 = t^3 + t + 1$. 整理して
$-\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{dt} + \dfrac{1}{u} - \dfrac{t}{u^2} = 0$. よって $\dfrac{du}{dt} - u = -t$

   (3) (i) $\dfrac{du}{dt} - u = 0$ より $\dfrac{1}{u}du = dt$. $\quad \log|u| = t + c \quad u = \pm e^{t+c} = Ce^t$. (ii)$u = ve^t$ とおく.
$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{dv}{dt}e^t + ve^t$ だから $\dfrac{dv}{dt}e^t + ve^t - ve^t = -t$. $\quad \dfrac{dv}{dt} = -te^{-t}$. $\quad v = -\displaystyle\int te^{-t}dt = te^{-t} - \int e^{-t}dt$