大日本図書　新基礎数学

1 章§ 1. 整数の計算

p.17.　練習問題 1-A

1. 解答参照

2. (1) 与式 $=\{(a+b)(a-b)\}^2=(a^2-b^2)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$. (2) 与式 $=42x^2+13x-40$.

   (3) 与式 $=\{(3a+2b)-5\}\}(3a+2b)+1\}=(3a+2b)^2-4(3a+2b)-5=9a^2+12ab+4b^2-12a-8b-5$.
   ($3a+2b=A$ とおいてもよい)
   (4) 与式 $=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=(a^3)^2-(b^3)^2=a^6-b^6$.　(5) 与式 $=x^3-12x^2y+48xy^2-64y^3$.
   ($a^3=A, b^3=B$ とおいてもよい)
   (6) 与式 $=2x^3-5x^2y+6x^2y-15xy^2-2xy^2+5y^3=2x^3+x^2y-17xy^2+5y^3$.

3. (1) 与式 $=a(x+y)-b(x+y)=(a-b)(x+y)$.

   (2) 与式 $=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$.　($a^2=A, b^2=B$ とおいてもよい)

   (3) 与式 $=(4a-3)(a+2)$.

   (4) 与式 $=(x^2)^2-8x^2-9=(x^2+1)(x^2-9)=(x^2+1)(x+3)(x-3)$.　($x^2=X$ とおいてもよい)

   (5) 与式 $=x^2+(y+2)x-2y^+7y-3=x^2+(y+2)x-(2y-1)(y-3)=(x+2y-1)(x-y+3)$.

   (6) 与式 $=x^2+(4y-8)x+3y^2-6y-9=x^2+(4y-8)x+3(y+1)(y-3)=(x+y+1)(x+3y-9)$.

4. 解答参照

5. (1) 解答参照

   (2) $x^3+7x^2+12x=x(x+3)(x+4), x^2-x-20=(x+4)(x-5)$. 最大公約数 $x+4$, 最小公倍数 $x(x+4)(x+3)(x-5)$.

   (3) $x^4-5x^2+4=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2), x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. 最大公約数 $(x+2)(x-1)$,

   最小公倍数 $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$.

   (4) $x^2-2x=x(x-2), x^2-3x+2=(x-1)(x-2), x^2-4x+4=(x-2)^2$. 最大公約数 $x-2$,

   最小公倍数 $x(x-2)^2(x-1)$.

6. ある整式を A とおくと除法の等式より $A=(x^2-1)(x^4+x^2+1)+x+1=x^6-1+x+1=x^6+x$.

7. ある整式を $P(x)$, $P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおくと除法の等式より

   $P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+3x+1$. 剰余の定理より $P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは $P(3)$ に等しい.

   $P(3)=(3+1)(3-3)Q(3)+3\times 3+1=10$. よって求める余りは 10.

p. 18 練習問題 1-B

1. (1) 与式 $=\{2(a+3b)-1\}\{3(a+3b)-2\}=6(a+3b)^2-7(a+3b)+2=6a^2+36ab+54b^2-7a-21b+2$.

   ($a+3b=A$ とおいてもよい)

   (2) 与式 $=\{(x+y)-z\}^3=(x+y)^3-3(x+y)^2z+3(x+y)z^2-z^3$

   $=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3(x^2+2xy+y^2)z+3xz^2+3yz^2-z^3$

   $=x^3+y^3-z^3+3x^2y+3xy^2-3x^2z+3xz^2-3y^2z+3yz^2-6xyz$.

(3) 与式 $=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}=\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$=(a^2-b^2-2bc-c^2)(a^2-b^2+2bc-c^2)=\{(a^2-b^2-c^2)-2bc\}\{(a^2-b^2-c^2)+2bc\}=(a^2-b^2-c^2)^2-(2bc)^2$

$=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2+2b^2c^2-2a^2c^2-4b^2c^2=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2.$

$(b+c=A, b-c=B, a^2-b^2-c^2=C, 2bc=D$ とおいてもよい$)$

(4) 与式 $=\{(x+1)(x^2-x+1)\}\{(x^2+x+1)(x^2-x+1)\}=(x^3+1)\{(x^2+1)+x\}\{(x^2+1)-x\}=(x^3+1)\{(x^2+1)^2-x^2\}$

$=(x^3+1)(x^4+2x^2+1-x^2)=(x^3+1)(x^4+x^2+1)=x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1.$

$(x^2+1=X$ とおいてもよい$)$

2. (1) 与式 $=x(3x^2-2xy-5y^2)=x(3x-5y)(x+y).$

(2) 与式 $=a^2+2ab+b^2-(c^2+2cd+d^2)=(a+b)^2-(c+d)^2=(a+b+c+d)(a+b-c-d).$

(3) 与式 $=x(y^2-2yz+z^2)+y^2z-yz^2=x(y-z)^2+yz(y-z)=(y-z)\{x(y-z)+yz\}=(y-z)(xy+yz-zx).$

(4) 与式 $=(x^3)^2-7x^3-8=(x^3+1)(x^3-8)=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

$=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4).$ $(x^3=X$ とおいてもよい$)$

(5) 与式 $=\{(x+1)+y\}\{(x+1)-2y\}-4y^2=(x+1)^2-y(x+1)-2y^2-4y^2=(x+1)^2-y(x+1)-6y^2$

$=\{(x+1)+2y\}\{(x+1)-3y\}=(x+2y+1)(x-3y+1).$ $(x+1=X$ とおいてもよい$)$

3. (1) 与式 $=(b^2-c^2)a+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c=-(b-c)a^2+(b+c)(b-c)a-bc(b-c)$

$=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}=-(b-c)(a-b)(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a).$

(2) 与式 $=x^3(x^2+x+1)+x^2+x+1=(x^3+1)(x^2+x+1)=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1).$

(3) 与式 $=\{x+(y+z)\}^3-x^3-y^3-z^3=x^3+3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3-x^3-(y^3+z^3)$

$=3x^2(y+z)+3x(y+z)^2+(y+z)^3-(y+z)(y^2-yz+z^2)=(y+z)\{3x^2+3x(y+z)+(y+z)^2-(y^2-yz+z^2)\}$

$=(y+z)(3x^2+3xy+3xz+y^2+2yz+z^2-y^2+yz-z^2)=(y+z)(3x^2+3xy+3xz+3yz)$

$=3(y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}=3(y+z)(x+y)(x+z)=3(x+y)(y+z)(z+x).$

4. $A=(x+1)(x-5)$, 最小公倍数 $(x+1)(x-5)(x-6)$. 最大公約数 $x+1$ は B の約数だから $B=(x+1)B_1$.

最小公倍数は B よの倍数だから $(x-5)(x-6)$ は B_1 の倍数. 最大公約数が $x+1$ だから B_1 は $x-5$ を約数にもたない.

また最小公倍数に $x-6$ があるから B は従って B_1 は $x-6$ を約数にもつ. よって $B_1=x-6$ で $B=(x+1)(x-6)$.

5. 2 次の整式, 3 次の整式をそれぞれ A, B とする. 最大公約数が $2x+1$ だから $A=(2x+1)A_1, B=(2x+1)B_1$ で

A_1 は 1 次, B_1 は 2 次である. 最小公倍数が $4x^4+3x^2-1=(4x^2-1)(x^2+1)=(2x+1)(2x-1)(x^2+1)$ だから

$A_1=2x-1, B_1=x^2+1, A=(2x+1)(2x-1), B=(2x+1)(x^2+1)$ である.

6. 除法の等式より $x^4-1=P(x)(x^3-3x^2+9x-27)+80$. よって $P(x)=\dfrac{x^4-1-80}{x^3-3x^2+9x-27}=\dfrac{x^4-81}{x^3-3x^2+9x-27}$.

$x^4-81=(x^2+9)(x^2-9)=(x^2+9)(x+3)(x-3), x^3-3x^2+9x-27=(x-3)(x^2+9)$ だから

$P(x)=\dfrac{(x^2+9)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x^2+9)}=x+3.$

7. $Q(x)$ を $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q_1(x)$, 余りを $R(x)$ とおくと x^2-3x+2 が 2 次だから

$R(x)$ は 1 次以下で $R(x)=ax+b$ とおける. よって除法の等式より $Q(x)=(x-1)(x-2)Q_1(x)+ax+b$.

剰余の定理より $Q(x)$ を $x-1, x-2$ で割ったときの余りは $Q(1), Q(2)$ だから $Q(1)=Q(2)=1$.

よって $Q(1)=(1-1)(1-2)Q_1(1)+a+b=a+b=1\cdots$①, $Q(2)=(2-1)(2-2)Q_1(2)+2a+b=2a+b=1\cdots$②.

①②より $a=0, b=1$. よって求める余りは $ax+b=1$ である.