大日本図書　新基礎数学

2 章§ 1. 方程式

p.48.　練習問題 1-A

1. (1) $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

(2) $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 3\cdot 5}}{2\cdot 3}=\dfrac{2\pm\sqrt{-56}}{6}=\dfrac{2\pm 2\sqrt{14}i}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{14}i}{3}$.

(3) $x^2+2x+1+x^2-4x+4=2x^2-2x+5=0$. よって $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 2\cdot 5}}{2\cdot 2}=\dfrac{2\pm\sqrt{-36}}{4}=\dfrac{2\pm 6i}{4}$
$=\dfrac{1\pm 3i}{2}$.

(4) $(x+1)(3x^2-5x-1)=0$. よって $x=-1$ または $3x^2-5x-1=0$. $3x^2-5x-1=0$ より
$x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-1)}}{2\cdot 3}=\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{6}$. よって $x=-1,\dfrac{5\pm\sqrt{37}}{6}$.

(5) 両辺に $(x-2)(x-4)$ をかけて $(x-4)-(x-2)=2(x-2)(x-4)$. よって $2x^2-12x+16+2=2(x-3)^2=0$.
従って $x=3$.

(6) 両辺を 2 乗して $5-x^2=(2x+5)^2=4x^2+20x+25$. よって $5x^2+20x+20=5(x+2)^2=0$. よって $x=-2$.

2. (1) 第 1 式 + 第 2 式より $3x+2z=11\cdots$①. 第 2 式 $\times 3-$ 第 3 式より $x+z=4\cdots$②. ① − ② × 2 より $x=3$.
②より $z=1$. 第 2 式より $3+y-1=4$. $y=2$. よって $x=3,y=2,z=1$.

(2) 第 1 式より $y=3-x$. 第 2 式に代入して $x^2-2x(3-x)-2(3-x)^2=x^2+6x-18=0$. よって
$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-18)}}{2\cdot 1}=\dfrac{-6\pm 6\sqrt{3}}{2}=-3\pm 3\sqrt{3}$. $y=3-(-3)\mp 3\sqrt{3}=6\mp 3\sqrt{3}$. よって
$x=-3\pm 3\sqrt{3},y=6\mp 3\sqrt{3}$ (復号同順).

3. (1) $x+y-2=2x-y$ より $x=2y-2$. $2x-y=x-2y+4$ より $x=-y+4$. よって $2y-2=-y+4$.
従って $y=2$. よって $x=2$. $x=2,y=2$.

(2) $x+2y+4=2x-y+7$ より $x=3y-3\cdots$①. $2x-y+7=2y-x$ より $3x=3y-7\cdots$②. ② − ① より $2x=-4$.
よって $x=-2$. ①より $y=\dfrac{1}{3}$. よって $x=-2,y=\dfrac{1}{3}$.

(3) $2x+3y-5z-3=0\cdots$①, $x-y+z=0\cdots$②, $3x-6y+2z+7=0\cdots$③. ① − ② × 2 より $5y-7z-3=0\cdots$④.
③ − ① × 3 より $-3y-z+7=0\cdots$⑤. ④ × 3 + ⑤ × 5 より $-26z+26=0$. よって $z=1$. ④より $y=2$. ①より
$x=1$. よって $x=1,y=2,z=1$.

4. $x^2+(4-k)x-4-5k=0$. $D=(4-k)^2-4\cdot(-4-5k)=0$. よって $k^2+12k+32=(k+4)(k+8)=0$.
従って $k=-4,-8$.

5. 解と係数の関係より $\alpha+\beta=-\dfrac{-8}{2}=4,\alpha\beta=\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)=19$.

(2) (1) より $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=4\left\{19-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right\}=82$.

(3) (1) より $\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=19^2-2\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{713}{2}$.

6. (1) $15x^2+22x+8=0$ の解は $x=\dfrac{-22\pm\sqrt{22^2-4\cdot 15\cdot 8}}{2\cdot 15}=\dfrac{-22\pm\sqrt{484-480}}{30}=\dfrac{-22\pm 2}{30}=-\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{5}$.
よって与式 $=15\left\{x-\left(-\dfrac{2}{3}\right)\right\}\left\{x-\left(-\dfrac{4}{5}\right)\right\}=(3x+2)(5x+4)$.

(2) $8x^2-12x+5=0$ の解は $x=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4\cdot8\cdot5}}{2\cdot8}=\dfrac{12\pm\sqrt{144-160}}{16}=\dfrac{12\pm4i}{16}=-\dfrac{3\pm i}{4}$.

よって与式 $=8\left(x-\dfrac{3+i}{4}\right)\left(x-\dfrac{3-i}{4}\right)$.

7. 道路の幅を xm とすると道路に囲まれた部分は縦 $(30-2x)$m, 横 $(50-2x)$m.

$x>0, 30-2x>0, 50-2x>0$ より $0<x<15$.

道路の面積より $30\times50-(30-2x)(50-2x)=200$. よって $1500-1500+160x-4x^2=200$

$x^2-40x+50=0$. $x=\dfrac{40\pm\sqrt{40^2-4\cdot50}}{2}=20\pm5\sqrt{14}$. $0<x<15$ より $x=20-5\sqrt{14}$. $20-5\sqrt{14}$m.

8. 右辺 $=a+b(x-2)+c(x^2-4x+4)+d(x^3-6x^2+12x-8)=dx^3+(c-6d)x^2+(b-4c+12d)x+a-2b+4c-8d$.

両辺の係数を比較して $d=6, c-6d=-16, b-4c+12d=0, a-2b+4c-8d=-5$. よって $d=6, c=20, b=8, a=-21$.

[別解 1] $x=2$ のとき $6\cdot2^3-16\cdot2^2-5=a$ より $a=-21$. $x=1$ のとき $-15=a-b+c-d$. $a=-21$ より $-b+c-d=6\cdots$①. $x=0$ のとき $-5=a-2b+4c-8d$. $a=-21$ より $-2b+4c-8d=16\cdots$②. $x=3$ のとき $6\cdot3^3-16\cdot3^2-5=13=a+b+c+d$. $a=-21$ より $b+c+d=34\cdots$③. ①+③ より $2c=40, c=20$.

②+③$\times2$ より $6c-6d=84$. $c=20$ より $120-6d=84, d=6$. ③より $b=8$.

[別解 2] 右辺 $=a+(x-2)(b+(x-2)(c+(x-2)d))$ より組立除法などで左辺を $x-2$ で割り, 次にその商を $x-2$ で割り, その次にその商を $x-2$ で割り $\cdots$ したときの余りが順に a,b,c,d である. よって右図のとおり $a=-21, b=8, c=20, d=6$.

2	6	−16	0	−5
		12	−8	−16
2	6	−4	−8	−21
		12	16	
2	6	8	8	
		12		
	6	20		

p. 49 練習問題 1-B

1. (1) $x^2=X$ とおくと $3X^2+10X-8=(3X-2)(X+4)=0$. よって $X=\dfrac{2}{3},-4$ より $x^2=\dfrac{2}{3},-4$.

従って $x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}},\pm\sqrt{-4}=\pm\dfrac{\sqrt6}{3},\pm2i$.

(2) $(x-1)(2x^3+4x^2-9x+3)=(x-1)^2(2x^2+6x-3)=0$. よって $x=1$ または $2x^2+6x-3=0$. $2x^2+6x-3=0$ より $x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot2\cdot(-3)}}{2\cdot2}=\dfrac{-6\pm2\sqrt{15}}{4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$. よって $x=1$(2 重解), $\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$.

(3) $x^2+2x-15=(x+5)(x-3)$ より両辺に $(x+5)(x-3)$ をかけて $2(x+1)-(x-3)=x(x+5)$. よって $x^2+4x-5=(x+5)(x-1)=0$. 従って $x=-5,1$. $x=-5$ は分母を 0 にするから無縁解. よって $x=1$.

(4) $|2x-3|^2=|3x-2|^2$ より $(2x-3)^2=(3x-2)^2$. よって $2x-3=\pm(3x-2)$. $2x-3=3x-2$ のとき $x=-1$. $2x-3=-(3x-2)$ のとき $x=1$. よって $x=\pm1$.

(5) 両辺を 2 乗して $x+5=(\sqrt{x-3}+2)^2=x-3+4\sqrt{x-3}+4$. よって $\sqrt{x-3}=1$. 従って $x-3=1^2$ より $x=4$. このとき $\sqrt{x+5}=\sqrt9=3, \sqrt{x-3}+2=\sqrt1+2=3$. よって $x=1$.

2. (1) 第 2 式より $(x+y)(x^2-xy+y^2)=26$. 第 1 式より $x+y=2$ だから $2(x^2-xy+y^2)=26, x^2-xy+y^2=13$. また第 1 式より $(x+y)^2=4, x^2+2xy+y^2=4$. よって $(x^2-xy+y^2)-(x^2+2xy+y^2)=13-4$, すなわち $-3xy=9, xy=-3\cdots$①. 第 1 式より $y=2-x\cdots$②. これを①に代入して $x(2-x)=-3, x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$. よって $x=3,-1$. ②より $y=-1,3$. よって $(x,y)=(3,-1),(-1,3)$.

(2) $=\dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{2}=k$ とおくと $x=4k, y=3k, z=2k\cdots$①. これを第 1 式に代入して $4k+2\cdot3k+3\cdot2k=16k=10$.

よって $k=\dfrac{5}{8}$. ①より $x=\dfrac{5}{2}, y=\dfrac{15}{8}, z=\dfrac{5}{4}$.

3. 両辺に $x(x^2-x+1)$ をかけると $2x-1=a(x^2-x+1)+x(bx+c)$. $x=0$ のとき $-1=a$. よって $a=-1$.

従って $2x-1=-(x^2-x+1)+x(bx+c)$ より $x(bx+c)=2x-1+(x^2-x+1)=x^2+x=x(x+1)$. よって $bx+c=x+1$, すなわち $b=c=1$. よって $a=-1, b=1, c=1$.

4. 条件より $x^3+2x^2+ax+b=(x-1)^2(x+c)$ が恒等式となればよい. $x=1$ のとき $1+2+a+b=0$ より $a+b=-3\cdots$①.

$x=0$ のとき $b=c\cdots$②. $x=-1$ のとき $-1+2-a+b=-4+4c$. ②より $a+3b=5\cdots$③. ③$-$① より $2b=8, b=4$.

よって①より $a=-7$. 従って $a=-7, b=4$.

5. $abc=1$ より $c=\dfrac{1}{ab}$. よって左辺 $=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{b\cdot\frac{1}{ab}+b+1}+\dfrac{\frac{1}{ab}}{\frac{1}{ab}\cdot a+\frac{1}{ab}+1}$

$=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{ab}{1+ab+a}+\dfrac{1}{a+1+ab}=\dfrac{a+ab+1}{ab+a+1}=1=$ 右辺.

6. $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=k$ とおくと $x=(b-c)k, y=(c-a)k, z=(a-b)k$. よって

$ax+by+cz=a(b-c)k+b(c-a)k+c(a-b)k=(ab-ac+bc-ab+ac-bc)k=0$.

7. 3 辺の長さを $x$cm, $y$cm, $z$cm, ただし斜辺は $z$cm, とすると周囲の長さより $x+y+z=24\cdots$①, 面積より

$\dfrac{1}{2}xy=24\cdots$②, 三平方の定理より $x^2+y^2=z^2\cdots$③ $(0<x,y,z<24)$. ①より $z=24-(x+y)$. ③に代入して

$x^2+y^2=\{24-(x+y)\}^2=24^2-48(x+y)+(x+y)^2=24^2-48(x+y)+x^2+2xy+y^2$. よって $24^2-48(x+y)+2xy=0$.

②より $xy=48$ だから $24^2-48(x+y)+2\cdot 48=0$. よって $24-2(x+y)+4=0$ より $y=14-x\cdots$④.

②に代入して $\dfrac{1}{2}x(14-x)=24$. よって $x^2-14x+48=(x-6)(x-8)=0$. 従って $x=6,8$. ④より $y=8,6$.

①より $z=10$. 以上により 3 辺の長さは $6cm, 8cm, 10cm$.