大日本図書　新基礎数学

2 章§ 2. 不等式

p.69.　練習問題 2-A

1. (1) $2x-6x<8-3, -4x<5$ より $x>-\dfrac{5}{4}$.　(2) $\dfrac{2}{3}x-3x\geqq\dfrac{1}{2}-4, -\dfrac{7}{3}x\geqq-\dfrac{7}{2}$ より $x\leqq\dfrac{3}{2}$.

(3) $-2x^2+5x+3>0$ より $2x^2-5x-3=(2x+1)(x-3)<0$. よって $-\dfrac{1}{2}<x<3$.

(4) $(x+2)(x-3)\geqq 0$ より $x\leqq -2, 3\leqq x$.

2. 縦の長さは $12-x$cm. $x>0, 12-x>0$ だから $0<x<12\cdots$①. 面積の条件より $x(12-x)\leqq 20$. よって $x^2-12x+20\geqq 0, (x-2)(x-10)\geqq 0$. 従って $x\leqq 2, 10\leqq x$. ①より $0<x\leqq 2, 10\leqq x<12$.

3. (1) $(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x-2)(x+1)\geqq 0$. よって $-1\leqq x\leqq 1, 2\leqq x$.

(2) $(x+1)(2x^2+x-10)=(x+1)(x-2)(2x+5)<0$. よって $x<-\dfrac{5}{2}, -1<x<2$.

4. (1) 左辺 − 右辺 $=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=\dfrac{2a^2+2b^2}{4}-\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4}=\dfrac{a^2-2ab+b^2}{4}=\dfrac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$.

よって左辺 ≧ 右辺. 等号は $a=b$ のときに限って成り立つ.

(2) 左辺 − 右辺 $=a^3+b^3-a^2b-ab^2=a^3-a^2b-ab^2+b^3=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$.

$a>0, b>0$ より $a+b>0$. また $(a-b)^2\geqq 0$. よって $(a-b)^2(a+b)\geqq 0$. 従って左辺 ≧ 右辺.

等号は $a=b$ のときに限って成り立つ.

5. (1) 逆「$xy=0$ ならば $x=0$」偽. 対偶「$xy\neq 0$ ならば $x\neq 0$」真.

(2) 逆「$x=1$ または $x=-1$ ならば $x^2=1$」真. 対偶「$x\neq 1$ かつ $x\neq -1$ ならば $x^2\neq 1$」真.

6. (1) $x=1\Rightarrow(x-1)(x+3)=0$, $x=1\not\Leftarrow(x-1)(x+3)=0$. よって十分条件.

(2) $|a|=2\Leftrightarrow a=\pm 2\Leftrightarrow a^2=4$. よって必要十分条件.

(3) $AB=CD\not\Rightarrow$ 平行四辺形, $AB=CD\Leftarrow$ 平行四辺形. よって必要条件.

p. 70 練習問題 2-B

1. (1) 1 式より $x\geqq -4$. 2 式より $x<\dfrac{1}{3}$. 3 式より $x<-1$. これらの共通部分は $-4\leqq x<-1$.

(2) 1 式より $(x+1)(x-3)\leqq 0$. よって $-1\leqq x\leqq 3$. 2 式より $x>2$. これらの共通部分は $2<x\leqq 3$.

2. (1) $x\neq 2$ であり $(x-2)^2>0$ だから両辺にこれをかけて $(x-2)(-x+4)>0$. 両辺に -1 をかけて $(x-2)(x-4)<0$. よって $2<x<4$.

(2) (1) と同様に $(x-2)^2$ を両辺にかけて $x-1<3(x-2)$. よって $-2x<-5$. 従って $x>\dfrac{5}{2}$.

3. (1) $a>0, b>0$ より $\dfrac{1}{b}>0$. 相加平均と相乗平均の関係より $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{2}\geqq\sqrt{a\cdot\dfrac{1}{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. よって $a+\dfrac{1}{b}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

同様に $b+\dfrac{1}{c}\geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{c}}, c+\dfrac{1}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}$. これらはすべて正だから, かけあわせて

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right)\geqq 8\sqrt{\dfrac{a}{b}}\sqrt{\dfrac{b}{c}}\sqrt{\dfrac{c}{a}}=8$. 等号は $a=\dfrac{1}{b}, b=\dfrac{1}{c}, c=\dfrac{1}{a}$ のとき ($a=\dfrac{1}{b}, b=\dfrac{1}{c}$ より $a=c$. $c=\dfrac{1}{a}$ より $a=\dfrac{1}{a}$. よって $a^2=1, a=\pm 1$. $a>0$ より $a=1$. 結局 $a=b=c=1$), よって $a=b=c=1$ のときに限って成り立つ.

(2) $a>0, b>0$ より $\dfrac{1}{a}, \dfrac{1}{b}>0$. 相加平均と相乗平均の関係より $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geqq\sqrt{\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$. 両辺に $\dfrac{2\sqrt{ab}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ をかけ

ると, これは正だから $\sqrt{ab} \geqq \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$. 等号は $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$, すなわち $a=b$ のときに限って成り立つ.

4. (1) $(2+a^2)-(2a-a^2)=2a^2-2a+2=2(a^2+a)+2=2\left\{\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}\right\}+2=2\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+2$

$=2\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2} \geqq \dfrac{3}{2}>0$. よって $2+a^2>2a-a^2$.

(2) 2 次不等式より $\{x-(2a-a^2)\}\{x-(2+a^2)\}>0$. (1) より $2+a^2>2a-a^2$ だから $x<2a-a^2, 2+a^2<x$.

5. (1) $a=1, b=i$ ならば $a^2+b^2=1^2+i^2=1-1=0$ であるが $a \neq 0, b \neq 0$. よって偽.

逆：$a=0$ かつ $b=0$ ならば $a^2+b^2=0$. これは明らかに真. 対偶の真偽は元の命題と同じだから偽.

(2) この命題は明らかに真. 逆：$x-y=-2$ ならば $x=1$ かつ $y=3$. これは偽. 反例は $(x,y)=(2,4)$ など多数ある.

対偶の真偽は元の命題と同じだから真.

6. (1) 対偶「$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$ ならば $x+y \leqq 0$ である」を証明する. これは明らに真である. よって元の命題は真である.

(2) 対偶「n が 3 の倍数でないならば, n^2 も 3 の倍数でない」を証明する. n が 3 の倍数でないから $n=3k+1$ または

$3k+2$(k は整数) と表せる.

(i) $n=3k+1$ のとき $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$.

$3k^2+2k$ は整数だから n^2 は 3 の倍数でない.

(ii) $n=3k+2$ のとき $n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$.

$3k^2+4k+1$ は整数だから n^2 は 3 の倍数でない.

以上により対偶は真である. よって元の命題は真である.