第 3 章　§ 1. 2 次関数

p. 85 練習問題 1-A

1. グラフより (1) $1 \leqq y < 4$　(2) $0 \leqq y < 4$

2. (1) 頂点の座標が $(2,1)$ だから求める放物線の方程式は $y = a(x-2)^2+1$　点 $(0,3)$ を通るから $3 = 4a+1$.

よって $a = \dfrac{1}{2}$.　求める放物線の方程式は $y = \dfrac{1}{2}(x-2)^2+1$

(2) 点 $(1,0)$ で接する $\Rightarrow$ 頂点の座標が $(1,0)$. 求める放物線の方程式は $y = a(x-1)^2$.

点 $(2,3)$ を通るから $3 = a$.　求める放物線の方程式は $y = 3(x-1)^2$

(3) 軸が $x = 2 \Rightarrow$ 頂点の座標が $(2,q)$. 求める放物線の方程式は $y = a(x-2)^2+q$.

点 $(0,0)$ を通るから $0 = 4a+q \cdots$①. 点 $(3,6)$ を通るから $6 = a+q \cdots$②.

①, ②より $a = -2, q = 8$.　求める放物線の方程式は $y = -2(x-2)^2+8$

3. (1) $y = x^2 - x = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$　最小値 $-\dfrac{1}{4}$　$\left(x = \dfrac{1}{2}\right)$

(2) $y = -3\left(x^2 - \dfrac{4}{3}x\right) + 1 = -3\left\{\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{4}{9}\right\} + 1 = -3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{4}{3} + 1 = -3\left(x - \dfrac{2}{3}\right)^2 + \dfrac{7}{3}$

最大値 $\dfrac{7}{3}$　$\left(x = \dfrac{2}{3}\right)$

(3) $y = -\dfrac{1}{2}(x^2+12x)+1 = -\dfrac{1}{2}\{(x+6)^2-36\}+1 = -\dfrac{1}{2}(x+6)^2+18+1 = -\dfrac{1}{2}(x+6)^2+19$

最大値 19　$(x = -6)$

4. (1) $y = (x-1)^2 - 1 - 2 = (x-1)^2 - 3$,　$x = -1$ のとき $y = 1, x = 5$ のとき $y = 13$.

よって最大値 13　$(x = 5)$, 最小値 -3　$(x = 1)$

(2) $y = -2(x^2+2x)+1 = -2\{(x+1)^2-1\}+1 = -2(x+1)^2+2+1 = -2(x+1)^2+3$,　$x = -3$ のとき $y = -5$.

よって最大値 3　$(x = -1)$, 最小値 -5　$(x = -3)$

(3) $y = -(x^2-5x) - \dfrac{1}{4} = -\left\{\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}\right\} - \dfrac{1}{4} = -\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + \dfrac{25}{4} - \dfrac{1}{4} = -\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 + 6$,

$x = 1$ のとき $y = \dfrac{15}{4}, x = 5$ のとき $y = -\dfrac{1}{4}$. よって最大値 6　$\left(x = \dfrac{5}{2}\right)$, 最小値 $-\dfrac{1}{4}$　$(x = 5)$

5. (1) $x^2 + x + 1 \leqq 0$　$D = 1 - 4 = -3 < 0$ よってグラフより解なし

(2) $(3x+2)(2x-3) < 0$ よってグラフより $-\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{3}{2}$.

6. この 2 次関数と x 軸との交点の x 座標は $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) = 0$ より $x = 2, 3$.

このどちらかが原点に移ればよいから -2 または -3.

7. $y = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2, y = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2$ 頂点で考えると $(-1,2)$ を $(2,0)$ に移せばよいから

x 軸方向に 3, y 軸方向に -2 平行移動.

8. 逆に考えれば, 頂点が $(0,1)$ の放物線を x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 平行移動した放物線が $y = x^2 + bx + c$.

x 軸方向に 1, y 軸方向に -3 平行移動すると頂点は $(1,-2)$ となるから放物線は $y = (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1$.

よって $b=-2, c=-1$.

9. $D=(-2)^2-4(k+3)=-4k-8$. $D>0$ つまり $-4k-8>0$ より $k<-2$ のとき実数解は 2 個.

$D=0$ つまり $k=-2$ のとき実数解 1 個. $D<0$ つまり $k>-2$ のとき実数解なし.

p. 86 練習問題 1-B

1. $y=x^2-2x+a=(x-1)^2+a-1$. よって頂点 $(1, a-1)$. $\quad y=bx^2-3x+1=b\left(x^2-\dfrac{3}{b}x\right)+1=$
$b\left\{\left(x-\dfrac{3}{2b}\right)^2-\dfrac{9}{4b^2}\right\}+1=b\left(x-\dfrac{3}{2b}\right)^2-\dfrac{9}{4b}+1$. よって頂点 $\left(\dfrac{3}{2b}, -\dfrac{9}{4b}+1\right)$.
頂点が一致するから $1=\dfrac{3}{2b}, a-1=-\dfrac{9}{4b}+1$. これより $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}$

2. $y=ax^2-2ax+b=a(x^2-2x)+b=a\{(x-1)^2-1\}+b=a(x-1)^2-a+b$. よって

$x=1$ のとき最小値 $-a+b$, $x=-2$ のとき最大値 $a(-2)^2-2a(-2)+b=8a+b$. よって

$-a+b=1, 8a+b=6$. これより $a=\dfrac{5}{9}, b=\dfrac{14}{9}$.

3. 最初に問題に 2 次不等式とあるので $a\neq 0$. $a<0$ のときは $y=ax^2+2x+a$ が上に凸だから関数の値 (y の値) が

負になる部分がある. よってすべての実数で $ax^2+2x+a>0$ とはならない. 従って $a>0$. $a>0$ のとき

関数は下に凸だから x 軸と共有点を持たなければ, すべての実数で $ax^2+2x+a>0$. よって

$D=2^2-4a^2<0$. $\quad a^2-1>0$. $\quad (a+1)(a-1)>0$. $\quad a<-1, a>1$. $\quad a>0$ より $a>1$.

4. $\mathrm{C}(t,0)$ とすると $\mathrm{D}(t,4-t^2)$, $\mathrm{A}(-t,4-t^2)$, $\mathrm{B}(-t,0)$ となる. このとき BC の長さ $=2t$, CD の長さ $=4-t^2$, で

周の長さ $=2\cdot 2t+2\cdot(4-t^2)=-2t^2+4t+8 \quad (0<t<2)$. $-2t^2+4t+8=-2(t^2-2t)+8=-2\{(t-1)^2-1\}+8$

$=-2(t-1)^2+10$. よって $t=1$ のとき周の長さは最大値 10 となる. このときの BC の長さは 2.

5. $y=x^2-2mx+4m=(x-m)^2-m^2+4m$. よって $s=-m^2+4m$. $s=-(m^2-4m)=-(m-2)^2+4$.

よって s は $m=2$ のとき最大値 4.

6. $\mathrm{P}(t,t^2)$ とおくと題意より $t^2=y$. AP$=\sqrt{(t-0)^2+(t^2-a)^2}$ $\quad\therefore$AP$^2=t^2+(t^2-a)^2$. よって AP$^2=y+(y-a)^2$.

AP^2 が最小となるとき AP も最小となるから, AP^2 について考える. AP$^2=y+(y-a)^2=y^2-(2a-1)y+a^2=$
$\left(y-\dfrac{2a-1}{2}\right)^2-\dfrac{(2a-1)^2}{4}+a^2=\left(y-\dfrac{2a-1}{2}\right)^2+\dfrac{4a-1}{4}$.
$y=t^2\geqq 0$ だから $\dfrac{2a-1}{2}\geqq 0$ か <0 かによって場合が分かれる.
$\dfrac{2a-1}{2}\geqq 0$ すなわち $a\geqq\dfrac{1}{2}$ の場合は $y=\dfrac{2a-1}{2}$ のとき最小で最小値は AP$^2=\dfrac{4a-1}{4}$, AP$=\dfrac{\sqrt{4a-1}}{2}$.
$\dfrac{2a-1}{2}<0$ すなわち $0<a<\dfrac{1}{2}$ の場合は $y=0$ のとき最小で最小値は AP$^2=a^2$, AP$=a$.

7. $y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\dfrac{b}{a}\right)+c=a\left\{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}\right\}+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a}+c=$
$a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ よって軸 $x=-\dfrac{b}{2a}$, 頂点 $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$