第 4 章§ 1 指数関数

p.109 練習問題 1-A

1. (1) $\sqrt[3]{8a^{-6}} = (2^3a^{-6})^{\frac{1}{3}} = 2^{3\times\frac{1}{3}}a^{-6\times\frac{1}{3}} = 2a^{-2}$　　(2) $(\sqrt[6]{a^{-3}})^4 = \{(a^{-3})^{\frac{1}{6}}\}^4 = a^{-3\times\frac{1}{6}\times 4} = a^{-2}$

(3) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$　　(4) $\sqrt[3]{a} \div \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{1}{3}} \div (a^3)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{3}-\frac{3}{4}} = a^{-\frac{5}{12}}$

2. (1) $0.7 = (0.7)^1, 1 = (0.7)^0, \sqrt{0.7} = (0.7)^{\frac{1}{2}}$.　$y = (0.7)^x$ は単調に減少するから

$-3 < -2 < 0 < \dfrac{1}{2} < 1$ より $\underline{(0.7)^{-3} > (0.7)^{-2} > 1 > \sqrt{0.7} > 0.7}$

(2) $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}, 1 = 4^0, \sqrt[3]{16} = 4^{\frac{2}{3}}$.　$y = 4^x$ は単調に増加するから

$\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{3} > 0 > -\dfrac{2}{5} < -\dfrac{1}{2}$ より $\underline{\sqrt[3]{16} > \sqrt[3]{4} > 1 > 4^{-\frac{2}{5}} > 4^{-\frac{1}{2}}}$

3. 問題文より $x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$

(1) $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 = 3^2 \therefore x + 2x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} = 9$. $x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 1$ より $x + 2 + x^{-1} = 9$.

よって $\underline{x + x^{-1} = 7}$

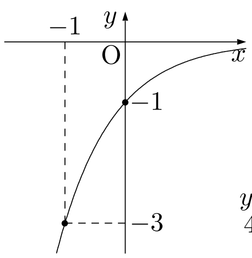
(2) $(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^3 = 3^3 \therefore x^{\frac{3}{2}} + 3x\cdot x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}x^{-1} + x^{-\frac{3}{2}} = 27$.

$x\cdot x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}x^{-1} = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} = 3$ より $x^{\frac{3}{2}} + 9 + x^{-\frac{3}{2}} = 27$. よって $\underline{x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}=18}}$

4. (1) $y = 3^x$ のグラフと原点に関して対称

$3^0 = 1, 3^1 = 3$ より $(0, -1), (-1, -3)$ を通る.

値域 $y = -3^{-x} < 0$ より $y = 0$(x 軸) が漸近線

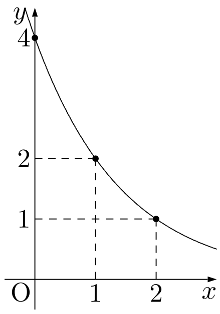


(2) $y = 2^{2-x} = 2^{-(x-2)}$ より $y = 2^x$ のグラフを

y 軸に関して対称に移し, x 軸方向に 2 平行移動.

$2^0 = 1, 2^1 = 2$ より $(2, 1), (1, 2)$ を通る. $x = 0$ のとき $y = 2^2 = 4$

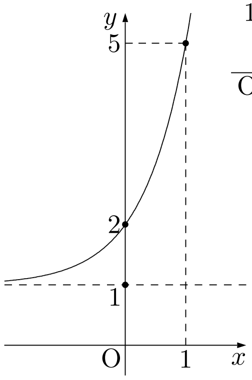
値域 $y = 2^{2-x} > 0$ より $y = 0$(x 軸) が漸近線



(3) $y = 4^x$ のグラフを y 軸方向に 1 平行移動

$4^0 = 1, 4^1 = 4$ より $(0, 2), (1, 5)$ を通る.

値域 $y = 4^x + 1 > 1$ より $y = 1$ が漸近線



5. (1) $2^{x+2} = 64 = 2^6 \therefore x + 2 = 6 \therefore \underline{x = 4}$

(2) $X = 2^x$ とおくと $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = X^2$ だから $X^2 - 3X - 4 = 0 \therefore (X-4)(X+1) = 0 \therefore X = 4, -1$

$X = 2^x > 0$ より $X = 4 \therefore 2^x = 4 = 2^2 \therefore \underline{x = 2}$

(3) $X = 3^x$ とおくと $9^{x+1} = 9^x9^1 = 9(3^2)^x = 9(3^x)^2 = 9X^2$ だから $9X^2 - X - 8 = 0 \therefore (X-1)(9X+8) = 0$

$\therefore X=1,-\dfrac{8}{9}$. $X=3^x>0$ より $X=1 \therefore 3^x=1=3^0 \therefore \underline{x=0}$

6. (1) $4^x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ よって $2^{2x}<2^{-\frac{1}{2}}$. $y=2^x$ は単調に増加するから $2x<-\dfrac{1}{2} \therefore \underline{x<-\dfrac{1}{4}}$

   (2) $9=3^2=(3^{-1})^{-2}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ よって $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2-x}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$. $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ は単調に減少するから

   $2-x<-2 \therefore -x<-4 \therefore \underline{x>4}$

7. (1) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2=\underline{a-b}$.

   (2) $(a^{\frac{1}{4}}+b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-b^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})=\{(a^{\frac{1}{4}})^2-(b^{-\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})$

   $=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{-\frac{1}{2}})^2=\underline{a-b^{-1}}$.

   (3) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{3}})^3-(b^{\frac{1}{3}})^3}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})\{(a^{\frac{1}{3}})^2+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^2\}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=(a^{\frac{1}{3}})^2+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^2$

   $=\underline{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$.

p.110 練習問題 1-B

1. (1) $(a^x-a^{-x})^2=a^{2x}-2a^xa^{-x}+a^{-2x}$. $a^xa^{-x}=a^x\cdot\dfrac{1}{a^x}=1, a^{-2x}=\dfrac{1}{a^{2x}}$ より

   与式 $=a^{2x}-2+\dfrac{1}{a^{2x}}=3-2+\dfrac{1}{3}=\underline{\dfrac{4}{3}}$

   (2) $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x)^3+(a^{-x})^3}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{(a^x+a^{-x})\{(a^x)^2-a^xa^{-x}+(a^{-x})^2\}}{a^x+a^{-x}}$

   $=(a^x)^2-a^xa^{-x}+(a^{-x})^2=a^{2x}-1+\dfrac{1}{a^{2x}}=3-1+\dfrac{1}{3}=\underline{\dfrac{7}{3}}$

2. (1) $8^{-\frac{1}{4}}=(2^3)^{-\frac{1}{4}}=2^{-\frac{3}{4}}, 4^{-\frac{2}{5}}=(2^2)^{-\frac{2}{5}}=2^{-\frac{4}{5}}, \sqrt[8]{2^{-7}}=(2^{-7})^{\frac{1}{8}}=2^{-\frac{7}{8}}$. $y=2^x$ は単調に増加するから

   $-\dfrac{7}{8}<-\dfrac{4}{5}<-\dfrac{3}{4}$ より $\underline{\sqrt[8]{2^{-7}}<4^{-\frac{2}{5}}<8^{-\frac{1}{4}}}$

   (2) $\sqrt{27}=(3^3)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}, \sqrt[4]{3^5}=(3^5)^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{5}{4}}, \sqrt[3]{81}=(3^4)^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{3}}$, $y=3^x$ は単調に増加するから

   $\dfrac{5}{4}<\dfrac{4}{3}<\dfrac{3}{2}$ より $\underline{\sqrt[4]{3^5}<\sqrt[3]{81}<\sqrt{27}}$

3. $(2^x-2^{-x})^2=3^2 \therefore (2^x)^2-2\cdot2^x2^{-x}+(2^{-x})^2=9,\quad 2^x2^{-x}=2^x\cdot\dfrac{1}{2^x}=1$ より

   $(2^x)^2-2+(2^{-x})^2=9 \therefore 2^{2x}+2^{-2x}=9+2=11$.

   よって $(2^x+2^{-x})^2=(2^x)^2+2\cdot2^x2^{-x}+(2^{-x})^2=2^{2x}+2+2^{-2x}=2^{2x}+2^{-2x}+2=11+2=13$.

   $2^{2x}>0, 2^{-2x}>0$ より $2^{2x}+2^{-2x}>0$ だから $\underline{2^{2x}+2^{-2x}=\sqrt{13}}$

4. (1) $X=4^x$ とおくと $16^x=(4^2)^x=(4^x)^2=X^2$ よって $X^2-5X+4>0 \therefore (X-4)(X-1)>0$

   $X<1, X>4. \therefore 4^x<1=4^0, 4^x>4=4^1$ よって $\underline{x<0, x>1}$

   (2) $X=2^x$ とおくと $2^{x+2}=2^x2^2=4X, 2^{-x}=\dfrac{1}{2^x}=\dfrac{1}{X}$. よって $4X-\dfrac{1}{X}+3=0 \therefore 4X^2-1+3X=0$

   $\therefore (X+1)(4X-1)=0 \therefore X=-1,\dfrac{1}{4}$. $X=2^x>0$ より $X=\dfrac{1}{4} \therefore 2^x=\dfrac{1}{4}=2^{-2} \therefore \underline{x=-2}$

   (3) $X=2^x$ とおくと $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2=X^2, 2^{x+1}=2^x2^1=2X$. よって $X^2+2X\leqq 24 \therefore X^2+2X-24\leqq 0$

$\therefore (X+6)(X-4) \leqq 0 \therefore -6 \leqq X \leqq 4,\ X = 2^x > 0$ より $0 < X \leqq 4, \therefore 0 < 2^x \leqq 4 = 2^2 \therefore \underline{x \leqq 2}$

(4) 第 1 式より $2^{x-y+1} = 8 = 2^3 \therefore x - y + 1 = 3 \therefore x = y + 2 \cdots$①. よって $4^x = 4^{y+2} = 4^y 4^2 = 16 \cdot 4^y$.

$4^y = Y$ とおくと $4^x = 16Y$ よって第 2 式より $16Y - Y = 60 \therefore 15Y = 60,\ Y = 4 \therefore 4^y = 4 \therefore y = 1$, ①より

$x = 1 + 2 = 3$ よって $\underline{x = 3, y = 1}$

5. $a > 1$ のとき $y = a^x$ は単調に増加するから $5x - 3 > 2 \therefore 5x > 5 \therefore \underline{x > 1}$

$0 < a < 1$ のとき $y = a^x$ は単調に減少するから $5x - 3 < 2 \therefore 5x < 5 \therefore \underline{x < 1}$

6. (1) $A = \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{6}}, B = \sqrt[6]{b} = b^{\frac{1}{6}}$ とおくと $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{6}})^2 = A^2$, $\sqrt[6]{ab} = (ab)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{6}} = AB$,

$\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}} = (b^{\frac{1}{6}})^2 = B^2$ よって与式$= (A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3 = (a^{\frac{1}{6}})^3 + (b^{\frac{1}{6}})^3 = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = \underline{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

(2) $\left\{\sqrt[3]{a^2 b^6}\right\}^{-\frac{3}{4}} \times \sqrt{\left(\dfrac{ab^{-2}}{2}\right)^{-3}} = \{(a^2 b^6)^{\frac{1}{3}}\}^{-\frac{3}{4}} \times \{(ab^{-2}2^{-1})^{-3}\}^{\frac{1}{2}}$

$= (a^{2 \times \frac{1}{3} \times (-\frac{3}{4})} b^{6 \times \frac{1}{3} \times (-\frac{3}{4})}) \times (a^{(-3) \times \frac{1}{2}} b^{(-2) \times (-3) \times \frac{1}{2}} 2^{(-1) \times (-3) \times \frac{1}{2}}) = (a^{-\frac{1}{2}} b^{-\frac{3}{2}}) \times (2^{\frac{3}{2}} a^{-\frac{3}{2}} b^3)$

$= 2^{\frac{3}{2}} a^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}} b^{-\frac{3}{2} + 3} = \underline{2^{\frac{3}{2}} a^{-2} b^{\frac{3}{2}}}$

7. 相加平均と相乗平均の関係より $\dfrac{a^x + a^y}{2} \geqq \sqrt{a^x a^y} = (a^x a^y)^{\frac{1}{2}} = (a^{x+y})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{x+y}{2}}$

8. 7 で $a = 2, y = 3y$ と置き換えると $\dfrac{2^x + 8^y}{2} = \dfrac{2^x + 2^{3y}}{2} \geqq 2^{\frac{x+3y}{2}}$. 問題文より $x + 3y = 2$ だから $\dfrac{2^x + 8^y}{2} \geqq 2^{\frac{2}{2}} = 2$

よって $2^x + 8^y \geqq 4$. 等号が成り立つのは $2^x = 2^{3y}$ 従って $x = 3y$ のとき. $x + 3y = 2$ より $x = 3y = 1$ すなわち

$x = 1, y = \dfrac{1}{3}$ のとき. よって $\underline{\text{最小値 } 4\ (x = 1, y = \frac{1}{3})}$