第 4 章§ 2 対数関数

p.121 練習問題 2-A

1. (1) $\log_4 x = 2 \Leftrightarrow x = 4^2 = \underline{16}$

(2) $\log_{\frac{1}{3}} x = -2 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = (3^{-1})^{-2} = 3^2 = \underline{9}$

(3) $\log_{10} x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} = \underline{10\sqrt{10}}$

(4) $\log_x 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = x^3$. $8 = 2^3$ より $\underline{x = 2}$

(5) $\log_x \sqrt{10} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{10} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. $\underline{x = 10}$

(6) $\log_{\sqrt{6}} 216 = x \Leftrightarrow 216 = \sqrt{6}^{x} = (6^{\frac{1}{2}})^x = 6^{\frac{x}{2}}$.

$216 = 6^3$ より $\frac{x}{2} = 3 \therefore \underline{x = 6}$

2. (1) $\log_3 54 - \log_3 18 = \log_3 \frac{54}{18} = \log_3 3 = \underline{1}$

(2) $\log_{10} \frac{1}{15} + \frac{1}{2}\log_{10} \frac{9}{4} = \log_{10} \frac{1}{15} + \log_{10} \sqrt{\frac{9}{4}} = \log_{10}\left(\frac{1}{15} \times \sqrt{\frac{9}{4}}\right) = \log_{10} \frac{1}{10} = \underline{-1}$

(3) $(\log_3 8) \cdot (\log_2 9) \cdot (\log_4 2) = (\log_3 2^3) \cdot \frac{\log_3 9}{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 2}{\log_3 4} = (3\log_3 2) \cdot \frac{2\log_3 3}{\log_3 2} \cdot \frac{\log_3 2}{2\log_3 2} = \underline{3}$

3. $\log_4 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2 + \log_2 3}{2\log_2 2} = \underline{\frac{1+m}{2}}$ $\log_3 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \underline{\frac{1}{m}}$

4. (1) $2\log_{0.5} 3 = \log_{0.5} 3^2 = \log_{0.5} 9$, $3\log_{0.5} 2 = \log_{0.5} 2^3 = \log_{0.5} 8$. $y = \log_{0.5} x$ は単調に減少するから

$8 < \frac{41}{5} = 8.2 < 9$ より $\underline{3\log_{0.5} 2 > \log_{0.5} \frac{41}{5} > 2\log_{0.5} 3}$

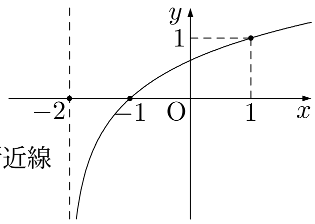
(2) $3 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8$, $\frac{1}{2}\log_2 50 = \log_2 50^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{50}$. $y = \log_2 x$ は単調に増加するから

$8 = \sqrt{64} > \sqrt{50} > \sqrt{49} = 7 > \sqrt{45}$ より $\underline{3 > \frac{1}{2}\log_2 50 > \log_2 7 > \log_2 \sqrt{45}}$

5. (1) $y = \log_3 x$ のグラフを x 軸方向に -2 平行移動.

$\log_3 1 = 0, \log_3 3 = 1$ より $(-1, 0), (1, 1)$ を通る.

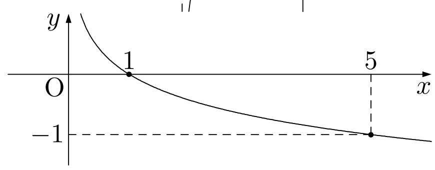
定義域 (真数条件)$x + 2 > 0$ より $x > -2$ よって $x = -2$ が漸近線



(2) $y = \log_5 x$ のグラフと x 軸に関して対称

$\log_5 1 = 0, \log_5 5 = 1$ より $(1, 0), (5, -1)$ を通る.

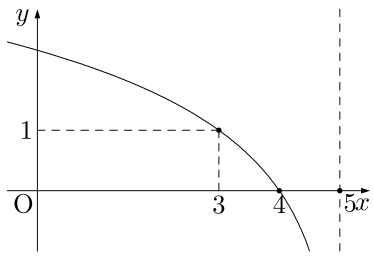
定義域 (真数条件)$x > 0$ より $x = 0$(y 軸) が漸近線



(3) $y = \log_2 x$ のグラフを y 軸に関して対称に移し, x 軸方向に 5 平行移動

$\log_2 1 = 0, \log_2 2 = 1$ より $(4, 0), (3, 1)$ を通る.

定義域 (真数条件)$5 - x > 0$ より $x < 5$ よって $x = 5$ が漸近線



6. 真数条件より $3x + 3 > 0$, $x^2 - 6x - 7 > 0 \therefore x > -1$ かつ $(x < -1, x > 7)$ よって $x > 7 \cdots$①

$3x + 3 = x^2 - 6x - 7 \therefore x^2 - 9x - 10 \therefore (x - 10)(x + 1) = 0 \therefore x = 10, -1$ ①より $\underline{x = 10}$

7. (1) 真数条件より $-2x + 1 > 0 \therefore x < \frac{1}{2} \cdots$① $\log_3(-2x + 1) > 1 = \log_3 3$.

$y = \log_3 x$ は単調に増加するから $-2x + 1 > 3 \therefore -2x > 2 \therefore x < -1$①より $\underline{x < -1}$

(2) 真数条件より $6 - x > 0 \therefore x < 6 \cdots$① $\log_4(6 - x) < \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\log_4 4 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 \sqrt{4} = \log_4 2$.

$y=\log_4 x$ は単調に増加するから $6-x<2 \therefore -x<-4 \therefore x>4$ ①より $\underline{4<x<6}$

p.122 練習問題 2-B

1. (1) $3\log_{10}\dfrac{3}{2}+\log_{10}24-2\log_{10}\dfrac{9}{10}=\log_{10}\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\times 24\div\left(\dfrac{9}{10}\right)^2=\log_{10}\dfrac{27}{8}\cdot 24\cdot\dfrac{100}{81}=\log_{10}100=\underline{2}$

   (2) $(\log_3 5)\cdot(\log_2 9)\cdot(\log_{25}4)=(\log_3 5)\cdot\dfrac{\log_3 9}{\log_3 2}\cdot\dfrac{\log_3 4}{\log_3 25}=(\log_3 5)\cdot\dfrac{2\log_3 3}{\log_3 2}\cdot\dfrac{2\log_3 2}{2\log_3 5}=\underline{2}$

   (3) $(\log_2 9+\log_4 3)\cdot(\log_{27}4)=\left(2\log_2 3+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}\right)\cdot\dfrac{\log_2 4}{\log_2 27}=\left(2\log_2 3+\dfrac{\log_2 3}{2\log_2 2}\right)\cdot\dfrac{2\log_2 2}{3\log_2 3}$

   $=\left(2\log_2 3+\dfrac{\log_2 3}{2}\right)\cdot\dfrac{2}{3\log_2 3}=\dfrac{5\log_2 3}{2}\cdot\dfrac{2}{3\log_2 3}=\underline{\dfrac{5}{3}}$

2. (1) 真数条件より $x^2-6x+8>0, x-2>0 \therefore (x<2, x>4)$ かつ $x>2$ よって $x>4\cdots$①

   与式より $\log_2\dfrac{x^2-6x+8}{x-2}=2\log_2 2 \therefore \log_2\dfrac{(x-2)(x-4)}{x-2}=\log_2 2^2 \therefore \log_2(x-4)=\log_2 4$

   $\therefore x-4=4$ よって $x=8$ ①より $\underline{x=8}$

   (2) 真数条件より $x^2-5x+4>0, x-1>0 \therefore (x<1, x>4)$ かつ $x>1$ よって $x>4\cdots$①

   与式より $\log_5(x^2-5x+4)=\log_5(x-1)+\log_5 5 \therefore \log_5(x^2-5x+4)=\log_5 5(x-1) \therefore x^2-5x+4=5(x-1)$

   $\therefore x^2-10x+9=0 \therefore (x-1)(x-9)=0 \therefore x=1,9$ ①より $\underline{x=9}$

   (3) 真数条件より $x>0\cdots$① $X=\log_2 x$ とおくと $X^2-X-2=0 \therefore (X-2)(X+1)=0 \therefore X=2,-1$

   $\therefore \log_2 x=2,-1 \therefore x=2^2, 2^{-1}$ ①より $\underline{x=4, \dfrac{1}{2}}$

3. $X=\log_a 4-\log_a 3=2\log_a 2-\log_a 3, Y=\log_a 8-\log_a 3=3\log_a 2-\log_a 3.$ $\log_a 2$ を消去すると

   $3X-2Y=3(2\log_a 2-\log_a 3)-2(3\log_a 2-\log_a 3)=6\log_a 2-3\log_a 3-6\log_a 2+2\log_a 3$

   $=-\log_a 3 \therefore \underline{\log_a 3=-3X+2Y}$

4. $5^x=\sqrt{10^z}$ より $\log_{10}5^x=\log_{10}\sqrt{10^z} \therefore x\log_{10}5=\log_{10}10^{\frac{z}{2}}=\dfrac{z}{2}\log_{10}10=\dfrac{z}{2}$ よって $x=\dfrac{z}{2\log_{10}5}\cdots$①

   同様に $2^y=\sqrt{10^z}$ より $\log_{10}2^y=y\log_{10}2$ だから $y=\dfrac{z}{2\log_{10}2}\cdots$②

   ①, ②より $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{2\log_{10}5}{z}+\dfrac{2\log_{10}2}{z}=\dfrac{2(\log_{10}5+\log_{10}2)}{z}=\dfrac{2\log_{10}10}{z}=\dfrac{2}{z}$

5. (1) 真数条件より $\log_3 x>0, x>0 \therefore x>3^0=1, x>0$ よって $x>1\cdots$①

   与式より $\log_3 x<2^1=2 \therefore x<3^2=9.$ ①より $\underline{1<x<9}$

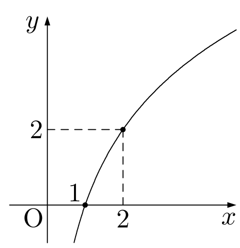
   (2) 真数条件より $x+1>0, 3-x>0 \therefore x>-1, x<3$ よって $-1<x<3\cdots$①

   与式より $x+1<3-x \therefore 2x<2 \therefore x<1.$ ①より $\underline{-1<x<1}$

6. (1) $y=\log_2 x$ のグラフを y 軸方向に 2 倍に拡大

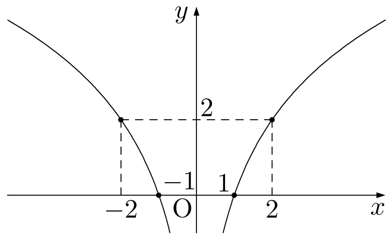
   $\log_2 1=0, \log_2 2=1$ より $(1,0),(2,2)$ を通る

   定義域 (真数条件)$x>0$ より x 軸が漸近線



(2) $\log_2 x^2$ は偶関数だからグラフは y 軸に関して対称

$x > 0$ のとき $y = \log_2 x^2 = 2\log_2 x$ よって (1) より



7. $\log_b a = \dfrac{\log_a a}{\log_a b} = \dfrac{1}{\log_a b}$ よって $X = \log_a b$ とおくと条件式より $X + \dfrac{1}{X} = \dfrac{10}{3}$

$\therefore X^2 + 1 = \dfrac{10}{3}X \therefore 3X^2 - 10X + 3 = 0 \therefore (3X-1)(X-3) = 0 \therefore X = \dfrac{1}{3}, 3$

$1 < b < a$ より $X = \log_a b < \log_a a = 1$ だから $X = \log_a b = \dfrac{1}{3}$ よって

$\log_a b - \log_b a = \log_a b - \dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{1}{3} - 3 = \underline{-\dfrac{8}{3}}$