第 5 章　§ 1. 三角比とその応用

p. 135 練習問題 1-A

1. (1) $\tan 36^\circ = \dfrac{x}{8}$ よって $x = 8\tan 36^\circ = 8 \times 0.7265 = 5.812.$

   $\cos 36^\circ = \dfrac{8}{y}$ よって $y = \dfrac{8}{\cos 36^\circ} = \dfrac{8}{0.8090} = 9.888\cdots.$

   答 $x = 5.81, y = 9.89$

   (2) $\sin 59^\circ = \dfrac{8.6}{x}$ よって $x = \dfrac{8.6}{\sin 59^\circ} = \dfrac{8.6}{0.8572} = 10.032\cdots.$

   $\tan 59^\circ = \dfrac{8.6}{y}$ よって $y = \dfrac{8.6}{\tan 59^\circ} = \dfrac{8.6}{1.6643} = 5.167\cdots.$

   答 $x = 10.03, y = 5.17$

2. $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}.$ $\sin\alpha > 0$ より $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}.$

   $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\dfrac{4}{3}.\ \therefore\ \dfrac{5\sin\alpha - 2}{6\tan\alpha + 7} = \dfrac{5\cdot\frac{4}{5} - 2}{6\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 7} = -2.$

3. (1) 左辺 $= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)(\sin^2\theta - \cos^2\theta).$　 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ であり, また $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ だから

   左辺 $= 1\cdot\{(1 - \cos^2\theta) - \cos^2\theta\} = 1 - 2\cos^2\theta =$ 右辺.

   (2) 左辺 $= \tan^2\theta + (1 + \tan^2\theta)(1 - \tan^2\theta)\cos^2\theta.$　 $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

   左辺 $= \tan^2\theta + \dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot(1 - \tan^2\theta)\cos^2\theta = \tan^2\theta + 1 - \tan^2\theta = 1 =$ 右辺.

4. (1) 余弦定理より $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ だから $(\sqrt{13})^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos C.$

   $13 = 16 + 9 - 24\cos C.$　 $\cos C = \dfrac{1}{2}.$ よって $C = 60^\circ.$

   (2) $B = 180^\circ - A - C = 180^\circ - 32^\circ - 80^\circ = 68^\circ.$ 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}.$ よって $\dfrac{a}{\sin 32^\circ} = \dfrac{12}{\sin 68^\circ}.$

   $a = \dfrac{12\sin 32^\circ}{\sin 68^\circ} = \dfrac{12\times 0.5299}{0.9272} = 6.858\cdots$

   同様に $\dfrac{c}{\sin C} = \dfrac{b}{\sin B}.$ よって $\dfrac{c}{\sin 80^\circ} = \dfrac{12}{\sin 68^\circ}.$ $c = \dfrac{12\sin 80^\circ}{\sin 68^\circ} = \dfrac{12\times 0.9848}{0.9272} = 12.745\cdots.$

   $a = 6.86, c = 12.75.$

5. (1) 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A} = 2R.$ よって $\sin A = \dfrac{a}{2R}.$ 同様に $\sin B = \dfrac{b}{2R}, \sin C = \dfrac{c}{2R}.$

   また, 余弦定理より $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}.$ bunsuu よって $\dfrac{c}{2R} = 2\cdot\dfrac{a}{2R}\cdot\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}.$

   (2) (1) より $\dfrac{c}{2R} = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2cR},$　 $c^2 = c^2 + a^2 - b^2.$

   $a^2 = b^2.$ $a > 0, b > 0$ より $a = b.$ よって $a = b$ の二等辺三角形.

6. 辺 BC 上に $CC' = 3$ となるように点 C' をとると $\triangle ABC'$ について $B = 57^\circ, C'(=\angle AC'B) = 68^\circ, a(= BC') = 2.$

   よって $A(=\angle BAC') = 180^\circ - B - C' = 180^\circ - 57^\circ - 68^\circ = 55^\circ.$　正弦定理より $\dfrac{c'}{\sin C'} = \dfrac{a}{\sin A}.$

   $c' = AB$ だから $\dfrac{AB}{\sin 68^\circ} = \dfrac{2}{\sin 55^\circ}.$ よって $AB = \dfrac{2\sin 68^\circ}{\sin 55^\circ} = \dfrac{2\times 0.9272}{0.8192} = 2.263\cdots$

   台形の高さ $= \triangle ABC'$ の高さを h とすると $\sin 57^\circ = \dfrac{h}{AB}$ よって $h = AB\sin 57^\circ.$

   台形の面積 $S = \dfrac{1}{2}(3 + 5)h = \dfrac{1}{2}\times 8\times AB\sin 57^\circ = 4\times 2.263\cdots\times 0.8387 = 7.593\cdots$　 $AB = 2.26$　$S = 7.59.$

p.136　1-B

1. (1) $\angle A = 36^\circ$ より $\angle B(=\angle ABC) = \angle C = 72^\circ.$ よって $\angle ABD = \angle DBC = 36^\circ.$

   ゆえに $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ となり $\triangle BCD, \triangle ADB$ は二等辺三角形となるから $AD = BD = x, CD = 1 - x.$

相似比より $AB:BC=BC:CD$ だから $1:x=x:(1-x)$. $\therefore x^2=1-x$ より $x^2+x-1=0$.

二次方程式の解の公式より $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. $x>0$ より $x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(2) $\angle A$ の二等分線を引くと底辺 BC の垂直二等分線になるから $\sin 18^\circ=\dfrac{x}{2}=\dfrac{-2+\sqrt{5}}{4}$.

2. (1) 証明　正弦定理より $\sin A=\dfrac{a}{2R}, \sin B=\dfrac{b}{2R}, \sin C=\dfrac{c}{2R}$ だから

左辺 $=(b-c)\cdot\dfrac{a}{2R}+(c-a)\cdot\dfrac{b}{2R}+(a-b)\cdot\dfrac{c}{2R}=\dfrac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{2R}=0=$ 右辺. (証明終り)

(2) 余弦定理より $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ だから

左辺 $=a\left(b\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-c\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)=\dfrac{a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2}{2}=b^2-c^2=$ 右辺. (証明終り)

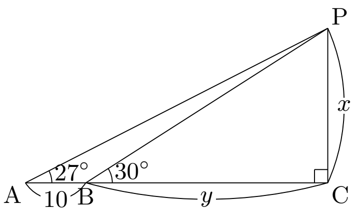
3. 余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ だから

$a\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=c\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. 両辺に $2abc$ をかけて

$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$. よって $a^2b^2+a^2c^2-a^4+b^2c^2+a^2b^2-b^4=a^2c^2+b^2c^2-c^4$.

$c^4=a^4-2a^2b^2+b^4=(a^2-b^2)^2$. よって $c^2=\pm(a^2-b^2)$ より $c^2=a^2-b^2$ または $c^2=b^2-a^2$.

よって $b^2+c^2=a^2$ または $a^2+c^2=b^2$. 斜辺が a または b の直角三角形.

4.


10m 進んだ地点を B, 木の根元を C とし, 木の高さを xm, B 地点から C 地点までの距離を ym とする. $\tan 27^\circ=\dfrac{x}{y+10}, \tan 30^\circ=\dfrac{x}{y}$. よって $y=\dfrac{x}{\tan 27^\circ}-10$

$y=\dfrac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$. ゆえに $\sqrt{3}x=\dfrac{x}{\tan 27^\circ}-10$.

$x=\dfrac{10}{\frac{1}{\tan 27^\circ}-\sqrt{3}}=\dfrac{10}{\frac{1}{0.5095}-1.732}=43.34\cdots$. 答 43.3m

5. 証明　$A+B+C=180^\circ$ より $B+C=180^\circ-A$ だから $\sin(B+C)=\sin(180^\circ-A)=\sin A$. よって

右辺 $=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}=\dfrac{a\sin B\sin C}{2}\cdot\dfrac{a}{\sin A}$. 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ だから

右辺 $=\dfrac{a\sin B\sin C}{2}\cdot\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=S=$ 左辺. (証明終り)

6. (1) 余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. よって $\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\dfrac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}$

$=\dfrac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2bc)^2}=\dfrac{\{2bc+(b^2+c^2-a^2)\}\{2bc-(b^2+c^2-a^2)\}}{(2bc)^2}$

$=\dfrac{(b^2+2bc+c^2-a^2)\{a^2-(b^2-2bc+c^2)\}}{(2bc)^2}=\dfrac{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}{(2bc)^2}$

$=\dfrac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{(2bc)^2}$. $\sin A>0$ より

$\sin A=\dfrac{\sqrt{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}}{2bc}$

(2) $b+c+a=2s, b+c-a=2s-2a=2(s-a), a+b-c=2s-2c=2(s-c), a-b+c=2s-2b=2(s-b)$

だから (1) より $\sin A=\dfrac{\sqrt{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)}}{2bc}=\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}}{bc}$.

よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\dfrac{2\sqrt{s(s-a)(s-c)(s-b)}}{bc}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.