第 6 章　§ 1. 点と直線

p. 173 練習問題 1-A

1. 求める点の座標を (x, y) とおくと 2 点間の距離の公式より $x^2+(y-6)^2=(x-6)^2+(y+2)^2=(x-7)^2+(y-5)^2$ これを展開整理して $-12y+36=-12x+4y+40=-14x-10y+74$ これを 2 つの等式にして連立させて解くと $x=3, y=2$ よって求める点の座標は $(3,2)$.
2. $\left(\dfrac{a+2}{2+1}, \dfrac{b+10}{2+1}\right)$ が $(-1,1)$ だから $a=-5, b=-7$
3. $\left(\dfrac{3+(-1)+a}{3}, \dfrac{4+(-5)+b}{3}\right)$ が $(-3,1)$ だから $a=-11, b=4$
4. (1) 直線 AB の傾きは $\dfrac{5-3}{4-2}=1$. 求める直線はこれに垂直だからその傾き m' は $1\times m'=-1$ よって $m'=-1$. また求める直線は AB の中点 $\left(\dfrac{2+4}{2}, \dfrac{3+5}{2}\right)$ つまり $(3,4)$ を通る．よって求める直線の方程式は $y-4=-1(x-3)$, よって $y=-x+7$
   (2) $(-1,3)$ と $(3,-2)$ を結ぶ直線の傾きは $\dfrac{-2-3}{3-(-1)}=-\dfrac{5}{4}$. 求める直線はこれに垂直だからその傾き m' は $-\dfrac{5}{4}\times m'=-1$ よって $m'=\dfrac{4}{5}$. また求める直線は $(0,5)$ を通る．よって求める直線の方程式は $y-5=\dfrac{4}{5}(x-0)$, よって $y=\dfrac{4}{5}x+5$ または $4x-5y+25=0$
   (3) 連立方程式にして解くと 2 直線の交点を $(1,3)$. 直線 $2x+5y-7=0$ の傾きは $-\dfrac{2}{5}$ だから, 求める直線の方程式は $y-3=-\dfrac{2}{5}(x-1)$ よって $y=-\dfrac{2}{5}x+\dfrac{17}{5}$ または $2x+5y-17=0$
5. 内分点の座標は $\left(\dfrac{12+4\times 3}{3+1}, \dfrac{-1+3\times 3}{3+1}\right)$ よって $(6,2)$. 線分の傾きは $\dfrac{3-(-1)}{4-12}=-\dfrac{1}{2}$. これに垂直な直線の傾き m' は $-\dfrac{1}{2}m'=-1$. よって $m'=2$. よって求める直線の方程式は $y-2=2(x-6)$. よって $y=2x-10$ または $2x-y-10=0$
6. 2 直線 $2x-3y=8, x-4y=9$ の交点を連立方程式で求めると $(1,-2)$. これを直線 $kx+y=3$ が通ればよいから $k-2=3$. よって $k=5$.
7. $b\neq 0, b'\neq 0$ より直線 $ax+by+c=0$ の傾きは $-\dfrac{a}{b}$. 直線 a ’$x+b'y+c'=0$ の傾きは $-\dfrac{a'}{b'}$. よって
   (1) 2 直線が平行または一致の条件は $-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{a'}{b'}$. よって $ab'=a'b$.
   (2) 2 直線が垂直の条件は $-\dfrac{a}{b}\cdot\left(-\dfrac{a'}{b'}\right)=-1$. より $aa'=-bb'$ よって $aa'+bb'=0$

p. 174 練習問題 1-B

1. $m=0$ または $m=-2$ のときは平行ではないから $m\neq 0,-2$ よって $m\neq 0, m+2\neq 0$. よって 1-A. 7 より $1\cdot(m+2)=m\cdot m$. よって $m^2-m-2=0, (m-2)(m+1)=0$. よって $m=2,-1$. $m=2$ のとき 2 直線は $x+2y-1=0, 2x+4y-2=0$. これは一致しているので平行でない. $m=-1$ のとき 2 直線は $x-y-4=0, -x+y-2=0$. これは平行. よって $m=-1$
2. 求める点の座標を (x,y) とおくと 2 点 $(3,4),(x,y)$ を通る直線は直線 $y=2x+1$ と垂直. 2 点を通る直線の傾きは $\dfrac{y-4}{x-3}$ だから $\dfrac{y-4}{x-3}\cdot 2=-1$. よって $x+2y=11\cdots$①. 2 点 $(3,4),(x,y)$ の中点 $\left(\dfrac{x+3}{2}, \dfrac{y+4}{2}\right)$ は直線 $y=2x+1$ 上にあるから $\dfrac{y+4}{2}=2\cdot\dfrac{x+3}{2}+1$. よって $2x-y=-4\cdots$②. よって①, ②を解いて $\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{26}{5}\right)$

3. 2 直線 $3x+4y+5=0, 3x+4y-6=0$ と垂直な直線との交点をそれぞれ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とおくと 2 点はそれぞれの直線上の点だから $3x_1+4y_1+5=0\cdots$①, $3x_2+4y_2-6=0\cdots$②. ②−① より $3(x_2-x_1)+4(y_2-y_1)-11=0\cdots$③ 2 点を通る直線の傾きは $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 直線 $3x+4y+5=0$ の傾きは $-\dfrac{3}{4}$. これが直交するから $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1$. よって $y_2-y_1=\dfrac{4}{3}(x_2-x_1)\cdots$④. これを③に代入して $3(x_2-x_1)+\dfrac{16}{3}(x_2-x_1)-11=0$ よって $x_2-x_1=\dfrac{33}{25}\cdots$⑤. これを④に代入して $y_2-y_1=\dfrac{44}{25}\cdots$⑥. よって⑤, ⑥より 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 間の距離は $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{33}{25}\right)^2+\left(\dfrac{44}{25}\right)^2}=\dfrac{11}{5}$

4. P, Q, R の座標はそれぞれ $\left(\dfrac{nx_2+mx_3}{m+n}, \dfrac{ny_2+my_3}{m+n}\right), \left(\dfrac{nx_3+mx_1}{m+n}, \dfrac{ny_3+my_1}{m+n}\right), \left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n}, \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$. よって △PQR の重心 G の座標は $\left(\dfrac{\frac{nx_2+mx_3}{m+n}+\frac{nx_3+mx_1}{m+n}+\frac{nx_1+mx_2}{m+n}}{3}, \dfrac{\frac{ny_2+my_3}{m+n}+\frac{ny_3+my_1}{m+n}+\frac{ny_1+my_2}{m+n}}{3}\right)$. より $\left(\dfrac{(m+n)x_1+(m+n)x_2+(m+n)x_3}{3(m+n)}, \dfrac{(m+n)y_1+(m+n)y_2+(m+n)y_3}{3(m+n)}\right)$. よって $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ これは △ABC の重心と一致する.

5. (1) 直線 ℓ の傾きは $-\dfrac{a}{b}$. よってこれと垂直な直線 OH の傾き m' は $-\dfrac{a}{b}\cdot m'=-1$ より $m'=\dfrac{b}{a}$. よって直線 OH の方程式は $y=\dfrac{b}{a}x\cdots$①. 2 直線の交点 H を求めるために①を直線 ℓ の方程式に代入すると $ax+\dfrac{b^2}{a}x+c=0$. よって $x=-\dfrac{ac}{a^2+b^2}$. ①より $y=-\dfrac{bc}{a^2+b^2}$. よって $\mathrm{H}\left(-\dfrac{ac}{a^2+b^2}, -\dfrac{bc}{a^2+b^2}\right)$

(2) (1) より OH$=\sqrt{\left(-\dfrac{ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(-\dfrac{bc}{a^2+b^2}\right)^2}=\dfrac{|c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

6. 点 (x_1, y_1) を x 軸方向に $-x_1$, y 軸方向に $-y_1$ 平行移動すると原点に移る. このとき直線 $ax+by+c=0$ が直線 ℓ に移るとすると求める距離は原点と直線 ℓ の距離に等しい. p.89 の平行移動したグラフの方程式より ℓ は $a(x-(-x_1))+b(y-(-y_1))+c=0$. これを整理して $ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$. このとき定数 ax_1+by_1+c が 1-B. 5. の c に相当するので 1-B. 5. より求める距離 d は $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$