

第1章 § 1 平面のベクトル

p.23 練習問題 1-A

1. (1) $2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{x}) = 3\vec{b} \therefore 2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{x} = 3\vec{b} \therefore 2\vec{x} = -2\vec{a} + \vec{b} \therefore \vec{x} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$

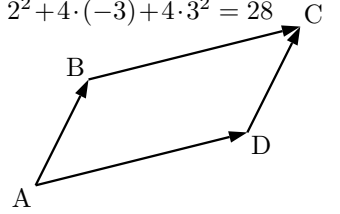
(2) $\vec{a} - \vec{x} = \vec{x} - \vec{b} \therefore -2\vec{x} = -\vec{a} - \vec{b} \therefore \vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta = 2 \cdot 3 \cos \frac{2}{3}\pi = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$ だから $|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 2^2 + 4 \cdot (-3) + 4 \cdot 3^2 = 28$
よって $|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

3. 証明 $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AD} = \vec{b}$ とおくと, 平行四辺形より $\vec{BC} = \vec{AD} = \vec{b}, \vec{DC} = \vec{AB} = \vec{a}$

よって $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{b} - \vec{DC} = \vec{b} - \vec{a}$ だから

左辺 $= |\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2 =$ 右辺



4. $\vec{a} + \vec{b} = (2, 3) + (x, -2) = (x + 2, 1), \vec{a} - \vec{b} = (2, 3) - (x, -2) = (2 - x, 5)$

(1) $(\vec{a} + \vec{b}) = m(\vec{a} - \vec{b})$ だから $(x + 2, 1) = m(2 - x, 5) \therefore x + 2 = m(2 - x) \dots \textcircled{1}, 1 = 5m \dots \textcircled{2}$.

②より $m = \frac{1}{5}$. ①に代入 $x + 2 = \frac{1}{5}(2 - x)$. これを解いて $x = -\frac{4}{3}$

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$ だから $(x + 2, 1) \cdot (2 - x, 5) = 0 \therefore (x + 2)(2 - x) + 5 = 0$ これを解いて $x = \pm 3$

5. L, M, N は BC, CA, AB の中点だから $\vec{OL} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}, \vec{OM} = \frac{\vec{OC} + \vec{OA}}{2}, \vec{ON} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$. よって

右辺 $= \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} + \frac{\vec{OC} + \vec{OA}}{2} + \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \frac{2\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OC}}{2} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} =$ 左辺.

6. 第1式より $\frac{x-2}{-2} = t$, 第2式より $\frac{y+1}{3} = t$ よって $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{3}$ またはこれを整理して $3x + 2y - 4 = 0$

7. (1) (2, -1)

(2) 点 P をとおり, 方向ベクトルが (2, -1) となるから $x = 1 + 2t, y = -1 - t$ (t は実数)

(3) 交点の座標を (x, y) とおくと, 交点は ℓ_1 上にあるから $x = 1 + 2t, y = -1 - t \dots \textcircled{1}$. 一方交点は ℓ 上にもあるから $2x - y + 3 = 0$ を満たす. これに①を代入して $2(1 + 2t) - (-1 - t) + 3 = 0$. よって $t = -\frac{6}{5}$. よって①より

$x = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) = -\frac{7}{5}, y = -1 - \left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{5}$. よって交点の座標は $\left(-\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$

8. (1) $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ とおくと $(9, -8) = m(3, 2) + n(1, -4) = (3m + n, 2m - 4n)$. よって $3m + n = 9, 2m - 4n = -8$.

これを解いて $m = 2, n = 3$. よって $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

(2) $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$ とおくと $(3, 2) = m(1, -4) + n(9, -8) = (m + 9n, -4m - 8n)$. よって $m + 9n = 3, -4m - 8n = 2$.

これを解いて $m = -\frac{3}{2}, n = \frac{1}{2}$. よって $\vec{a} = -\frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

p.25 練習問題 1-B

1. $\vec{OD} = \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}, \vec{OA} \cdot \vec{OD} = \vec{a} \cdot \frac{|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ よって

$\cos \alpha = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OD}}{|\vec{OA}||\vec{OD}|} = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OD}}{|\vec{a}||\vec{OD}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{(|\vec{a}| + |\vec{b}|)|\vec{OD}|}$, 同様に $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = \frac{|\vec{b}|(\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}|)}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$

$\cos \beta = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OD}}{|\vec{OB}||\vec{OD}|} = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OD}}{|\vec{b}||\vec{OD}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}|}{(|\vec{a}| + |\vec{b}|)|\vec{OD}|}$, よって $\cos \alpha = \cos \beta$

2. $\vec{OL} = \frac{\vec{OB} + 2\vec{OC}}{3}, \vec{OM} = \frac{\vec{OC} + 2\vec{OA}}{3}, \vec{ON} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{3}$. よって

$\triangle LMN$ の重心は $\frac{\vec{OB} + 2\vec{OC}}{3} + \frac{\vec{OC} + 2\vec{OA}}{3} + \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{3} = \frac{\vec{OB} + 2\vec{OC} + \vec{OC} + 2\vec{OA} + \vec{OA} + 2\vec{OB}}{9}$

$$= \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}. \text{ よって } \triangle ABC \text{ の重心と } \triangle LMN \text{ の重心は一致する.}$$

3. (1) 証明 左辺 $= \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2(1 - \cos^2\theta)} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\sin^2\theta}$, $0 \leq \theta < \pi$ より $\sin\theta \geq 0$
よって左辺 $= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta =$ 右辺

(2) 新基礎数学 5 章 § 1 の三角形の面積の公式より $S = \frac{1}{2}OA \cdot OB \sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ だから

(1) より $S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

(3) $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 - (a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2)$
 $= a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 = (a_1b_2 - a_2b_1)^2$ よって (2) より $S = \frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$

4. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-2, 0) - (1, 3) = (-3, -3)$, $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (-1, -2) - (1, 3) = (-2, -5)$ だから 3 より
 $\triangle ABC = |(-3) \cdot (-5) - (-3) \cdot (-2)| = |9| = 9.$

5. (1) $|\vec{CP}| = r$ より $\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$ だから $|\vec{OP} - \vec{OC}| = r$

(2) (1) より $|\vec{OP} - \vec{OC}|^2 = r^2$. $P(x, y)$ とすると $\vec{OP} - \vec{OC} = (x, y) - (a, b) = (x - a, y - b)$ よって
 $|\vec{OP} - \vec{OC}|^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$

6. (1) 直径に対する円周角は直角だから $\angle APB = 90^\circ$. よって $\vec{AP} \perp \vec{BP}$ つまり $\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$
 $(\vec{OP} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OP} - \vec{OB}) = 0$

(2) $P(x, y)$ とすると $\vec{OP} - \vec{OA} = (x, y) - (x_1, y_1) = (x - x_1, y - y_1)$, $\vec{OP} - \vec{OB} = (x, y) - (x_2, y_2) = (x - x_2, y - y_2)$
よって $(x - x_1, y - y_1) \cdot (x - x_2, y - y_2) = (x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$