第 1 章§ 2 空間のベクトル

p.45 練習問題 2-A

1. $\overrightarrow{\mathrm{DB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\overrightarrow{\mathrm{CD}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -\vec{c} - \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$
2. $\mathrm{D}(x, y, z)$ とおくと条件より $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (0-2, 3-5, 7-1) = (-2, -2, 6)$, $\overrightarrow{\mathrm{DC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $= (6-x, -y, 4-z)$ よって $6-x=-2, -y=-2, 4-z=6$ より $x=8, y=2, z=-2$. $\mathrm{D}(8, 2, -2)$.
3. 条件より $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ よって $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = m\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2+3, -5-2, 3+1) = (5, -7, 4)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $= (a+3, b-2, -5+1) = (a+3, b-2, -4)$. よって $(a+3, b-2, -4) = m(5, -7, 4)$ より $a+3 = 5m$, $b-2 = -7m, -4 = 4m$. $m=-1$ より $a=-8, b=9$.
4. $3\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \cdots$①, $7\vec{x} + 3\vec{y} = \vec{b} \cdots$②, ①×3 − ② より $2\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b}$ よって $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ $= \frac{3}{2}(-2, -1, 3) - \frac{1}{2}(1, 3, 2) = \left(-\frac{7}{2}, -3, \frac{7}{2}\right)$. ②×3 − ①×7 より $2\vec{y} = 3\vec{b} - 7\vec{a}$ よって $\vec{y} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{7}{2}\vec{a}$ $= \frac{3}{2}(1, 3, 2) - \frac{7}{2}(-2, -1, 3) = \left(\frac{17}{2}, 8, -\frac{15}{2}\right)$.
5. 平行だから方向ベクトルは同じで $(2, 1, -3)$ よって $x = -1 + 2t, y = 4 + t, z = 7 - 3t$ (t は実数), または $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-7}{-3}$.
6. 平面と直線が平行だから平面の法線ベクトル $\vec{n} = (a, 2, -1)$ と直線, すなわち直線の方向ベクトル $\vec{d} = (-1, 5, 7)$ は垂直. よって $\vec{n} \cdot \vec{d} = a \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 = 0$. $-a + 10 - 7 = 0$. $a = 3$.
7. 平面の方程式は $3(x-2) + (y+1) - (z-6) = 0$ より $3x + y - z + 1 = 0 \cdots$① 媒介変数 t による直線の方程式は $x = -t, y = 1 + 2t, z = t \cdots$②. これを①に代入して $3(-t) + (1+2t) - t + 1 = 0$. よって $t = 1$. ①より $x = -1, y = 3, z = 1$. よって交点の座標は $(-1, 3, 1)$.
8. 媒介変数 t による直線の方程式は $x = 3+2t, y = -1+t, z = 4+2t \cdots$①. 球の方程式は $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2 = 6^2 = 36 \cdots$②. ①を②に代入して $(3+2t-3)^2 + (-1+t+1)^2 + (4+2t-4)^2 = 9t^2 = 36$. よって $t = \pm 2$. ①より $t = 2$ のとき $x = 7, y = 1, z = 8$. $t = -2$ のとき $x = -1, y = -3, z = 0$. よって交点の座標は $(7, 1, 8), (-1, -3, 0)$.

p.46 練習問題 2-B

1. 条件より $\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{DBC}$ だから $\left|\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right|, \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{DBC}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}}$. よって $0 = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}) = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}$. よって $\overrightarrow{\mathrm{BC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AD}}$.
2. 求める平面の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とすると 2 直線は平面に含まれるので, その方向ベクトル $\vec{d} = (3, 4, -5)$ は $\vec{n}$ と直交するから $\vec{d} \cdot \vec{n} = 3a + 4b - 5c = 0 \cdots$①. また 2 直線がそれぞれ通る点 $\mathrm{A}(1, -2, -3)$, $\mathrm{B}(-1, 0, 1)$ も平面に含まれるから $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1-1, 0-(-2), 1-(-3)) = (-2, 2, 4)$ も平面に含まれ, $\vec{n}$ と直交するから $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \vec{n} = -2a + 2b + 4c = 0 \cdots$②. ①, ②より $a = -13b, c = -7b$. よって $c = -1$ とおくと $\vec{n} = (13, -1, 7)$. 平面は点 A を通るから求める平面の方程式は $13(x-1) - (y+2) + 7(y+3) = 0$. よって $13x - y + 7z + 6 = 0$
3. (1) 条件より点 A は平面 α 上にも平面 β 上にもあり, α, β の方程式を満たすので, これらに代入して $2x + 5z - 1 = 0 \cdots$①, $2x + z - 5 = 0 \cdots$②. ①, ②より $x = 3, z = -1$

   (2) 求めるベクトルを $\vec{d} = (a, b, c)$ とおくと, 平面 α の法線ベクトル $\vec{n_1} = (2, -3, 5)$, 平面 β の法線ベクトル $\vec{n_2} = (2, 3, 1)$ より $\vec{d} \cdot \vec{n_1} = 2a - 3b + 5c = 0 \cdots$①, $\vec{d} \cdot \vec{n_2} = 2a + 3b + c = 0 \cdots$②. ①, ②より $a = -\frac{3}{2}c, b = \frac{2}{3}c$. よって $c = 6t$ とおくと $a = -9t, b = 4t$ より $\vec{d} = (-9t, 4t, 6t) = t(-9, 4, 6)$ (t は 0 でない実数)

   (3) 平面 α, β の交線は平面 α, β の法線ベクトルのいずれにも直交するから (2) より $t = 1$ として方向ベクトル $\vec{d} = (-9, 4, 6)$. また点 A を通るから交線の方程式は $x = 3 - 9t, y = 4t, z = -1 + 6t$ (t は実数) または

$$\frac{x-3}{-9}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{6}.$$

4. (1) xy 平面の方程式は $z=0$. これを球の方程式に代入して $x^2+y^2-6x+8y-20=0$, $(x-3)^2-9+(y+4)^2-16-20=0$, $(x-3)^2+(y+4)^2=45$. よって中心 $(3,-4,0)$, 半径 $\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

   (2) x 軸の方程式は $y=0, z=0$. これを球の方程式に代入して $x^2-6x-20=0$, $x=\dfrac{6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-20)}}{2}=3\pm\sqrt{29}$. よって切り取られる線分の両端の点の座標は $(3+\sqrt{29},0,0), (3-\sqrt{29},0,0)$, 切り取られる線分の長さは $(3+\sqrt{29})-(3-\sqrt{29})=2\sqrt{29}$.

5. 条件より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\cos\angle\mathrm{AOB}=3\cdot 2\cos\dfrac{\pi}{2}=0$,

   $\vec{b}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\cos\angle\mathrm{BOC}=2\cdot 2\cos\dfrac{\pi}{3}=2$,

   $\vec{c}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\cos\angle\mathrm{COA}=2\cdot 3\cos\dfrac{\pi}{3}=3$ よって

   $(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b})\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot\vec{a}-l|\vec{a}|^2-m\vec{a}\cdot\vec{b}=3-9l=0$. よって $l=\dfrac{1}{3}$.

   $(\vec{c}-l\vec{a}-m\vec{b})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}-l\vec{a}\cdot\vec{b}-m|\vec{b}|^2=2-4m=0$. よって $m=\dfrac{1}{2}$.

6. $l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}=\vec{0}$ とする. $\vec{a}$ と内積をとると $l\left|\vec{a}\right|^2+m\vec{a}\cdot\vec{b}+n\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdot\vec{a}=0$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ より $l\left|\vec{a}\right|^2=0$.

   $\vec{a}\neq\vec{0}$ より $\left|\vec{a}\right|\neq 0$ だから $l=0$.

   $\vec{b}$ と内積をとると $l\vec{a}\cdot\vec{b}+m\left|\vec{b}\right|^2+n\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdot\vec{b}=0$. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より $m\left|\vec{b}\right|^2=0$.

   $\vec{b}\neq\vec{0}$ より $\left|\vec{b}\right|\neq 0$ だから $m=0$.

   $\vec{c}$ と内積をとると $l\vec{a}\cdot\vec{c}+m\vec{b}\cdot\vec{c}+n\left|\vec{c}\right|^2=\vec{0}\cdot\vec{c}=0$. $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$ より $n\left|\vec{c}\right|^2=0$.

   $\vec{c}\neq\vec{0}$ より $\left|\vec{c}\right|\neq 0$ だから $n=0$.

   以上により $l=m=n=0$. よって $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ は線形独立