線形代数問題集の補足

p.8

8. (2), (3), (4) は $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ などをすべて $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OP}$ を用いて表す.

次に $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ で表す. つまり, $\overrightarrow{OP} = \cdots$ の形にする → 内分点の公式.

9. (2) (1) より右辺 $= 2(|\overrightarrow{AM}|^2 + |\overrightarrow{BM}|^2) = 2\left(\left|\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right|^2 + \left|\dfrac{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}}{2}\right|^2\right)$

$$= 2\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}}{2}\right)$$

$\cdots$ 以下内積を計算して左辺に

10. (2) 線形代数 p.20 例題 9 参照

(3) $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{13}$ だから $\overrightarrow{e} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3,\ -1)$.

正射影については線形代数 p.11 参照. この p.11 の図より $\cos\theta = \dfrac{OH}{OB}$.

よって $OH = OB\cos\theta = |\overrightarrow{b}|\cos\theta$. この問題に置き換えると $h = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta \cdots (*)$.

ここで内積の定義より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{e} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{e}|\cos\theta$. $\overrightarrow{e}$ は単位ベクトルなので $|\overrightarrow{e}| = 1$.

よって $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{e} = |\overrightarrow{AB}|\cos\theta$. $(*)$ より $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{e} = h$.

つまり $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{e}$ を成分で計算すればよい.

12. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ よって $|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + |\overrightarrow{AB}|^2$.

$|\overrightarrow{BC}| = BC = a$, $|\overrightarrow{AC}| = CA = b, |\overrightarrow{AB}| = AB = c$ より

$a^2 = b^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + c^2$. ゆえに $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$

13. $|\overrightarrow{c}|^2 = |\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{a}|^2 + 2t\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + t^2|\overrightarrow{b}|^2$.

$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{b}| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = 1\times 3 + 2\times 1 = 5$ より

$|\overrightarrow{c}|^2 = \sqrt{5}^2 + 2t\times 5 + t^2\times\sqrt{10}^2 = 5 + 10t + 10t^2$

(1) $|\overrightarrow{c}| = 5$ より $|\overrightarrow{c}|^2 = 25$ だから $5 + 10t + 10t^2 = 25$. 以下 2 次方程式を解いて $t = -2,\ 1$.

(2) $|\overrightarrow{c}|$ が最小, つまり $|\overrightarrow{c}|^2 = 5 + 10t + 10t^2$ が最小だから, 2 次関数の最小値の問題. 解答参照.

14. 解答参照

15. 例題を使う. 解答参照. $\overrightarrow{OA} = (1,\ 3)$, $\overrightarrow{OB} = (4,\ -2)$(位置ベクトルの成分は座標と同じだから)

16. 例題と解答参照.

17. (1) $s + t = 2$ より $\dfrac{s}{2} + \dfrac{t}{2} = 1$. よって $\dfrac{s}{2} = s'$, $\dfrac{t}{2} = t'$ とおくと, $\underline{s' + t' = 1,\ s' > 0,\ t' > 0.}$

また $s = 2s'$, $t = 2t'$ であり $\overrightarrow{p} = s\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{b}$ より $\overrightarrow{p} = 2s'\overrightarrow{a} + 2t'\overrightarrow{b}$.

$2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ となる点 A', B' をとると (つまり線分 OA, OB の延長線上に O からの距離が 2 倍の点 A', B' をとると)$2\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, 2\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ だから

$\underline{\overrightarrow{p} = s'\overrightarrow{OA'} + t'\overrightarrow{OB'}}$

以上により例題の (1) と同様に P は線分 $A'B'$ 上にあって, $A'B'$ を $t':s'=\dfrac{t}{2}:\dfrac{s}{2}=t:s$ の比に内分する点である.

(2) $2s+3t=6$ より $\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{2}=1$. $\dfrac{s}{3}=s'$, $\dfrac{t}{2}=t'$ とおき,

$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$, $2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$ となる点 A', B' をとると (1) と同様に

$\underline{s'+t'=1,\ s'<0,\ t'>0,\ \overrightarrow{p}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}}$

従って例題 (2) のようにして P は線分 $A'B'$ を B' の側に延長した線上にあって, $A'B'$ を $\dfrac{t}{2}:-\dfrac{s}{3}$ の比に外分する点である.

18. 直線 $3x-4y=0$ は $y=\dfrac{3}{4}x$ であるから, 傾き $\dfrac{3}{4}$. よって x が 4 増える間に y は 3 増える. ゆえに方向ベクトルは $(4,\,3)$ である, 同様にして直線 $12x-5y=0$ の方向ベクトルは $(5,\,12)$ となる.
例題により $\overrightarrow{a}=(4,\,3)$, $\overrightarrow{b}=(5,\,12)$ とおくと, これらの直線のなす角を 2 等分する直線の方向ベクトルは $\dfrac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}+\dfrac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}=\dfrac{(4,\,3)}{\sqrt{4^2+3^2}}+\dfrac{(5,\,12)}{\sqrt{5^2+12^2}}=\dfrac{(4,\,3)}{5}+\dfrac{(5,\,12)}{13}$

$$=\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{13},\,\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\right)=\left(\frac{77}{65},\,\frac{99}{65}\right)=\frac{11}{65}(7,\,9).$$

方向ベクトルとしては $(7,\,9)$ をとればよい.(方向ベクトルの長さは自由にかえてよいから)

元の 2 直線は原点で交わるから求める直線も原点 $(0,\,0)$ を通る. よって求める直線の方程式は

$$\begin{cases} x=0+7t=7t \\ y=0+9t=9t \end{cases}\quad ゆえに\ \frac{x}{7}=t=\frac{y}{9}.\quad \therefore 9x-7y=0.$$

直線 $12x-5y=0$ の方向ベクトルの方を逆向きの $\overrightarrow{b}=(-5,\,-12)$ にとって同じようにすると

$$\frac{\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|}+\frac{\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}=\frac{(4,\,3)}{\sqrt{4^2+3^2}}+\frac{(-5,\,-12)}{\sqrt{5^2+12^2}}=\cdots=\frac{3}{65}(9,\,-7).$$

方向ベクトル $(9,\,-7)$ と原点 $(0,\,0)$ を通ることから求めるもう一つの直線の方程式は $7x+9y=0$.

19. 円のベクトル方程式は $|\overrightarrow{p}-\overrightarrow{c}|^2=r^2$. ここで $\overrightarrow{p}$ は動点の位置ベクトル. よって未知数 x のようなもので, 残りのものは定数のようなものである. (2 次関数の変形でやった 2 乗の形を作るようなもの)

(1) $\left(\overrightarrow{p}-\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right)\left(\overrightarrow{p}-\dfrac{\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}{2}\right)=|\overrightarrow{p}|^2-\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\cdot\overrightarrow{p}-\dfrac{\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}{2}\cdot\overrightarrow{p}+\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}{2}$

$$=|\overrightarrow{p}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}+\frac{\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}{2}\right)\cdot\overrightarrow{p}+\frac{|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2}{4}=0$$

$$\therefore |\overrightarrow{p}|^2-\frac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}}{2}\cdot\overrightarrow{p}+\frac{|\overrightarrow{a}|^2}{4}=\frac{|\overrightarrow{b}|^2}{4}$$

$$\therefore |\overrightarrow{p}|^2-2\cdot\frac{\overrightarrow{a}}{2}\cdot\overrightarrow{p}+\frac{|\overrightarrow{a}|^2}{4}=\frac{|\overrightarrow{b}|^2}{4}$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{p}-\frac{\overrightarrow{a}}{2}\right|^2=\left(\frac{|\overrightarrow{b}|}{2}\right)^2.\ よって\ \overrightarrow{c}=\frac{\overrightarrow{a}}{2},\ r=\frac{|\overrightarrow{b}|}{2}.\ 解答参照$$

(2) $|\overrightarrow{p}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{p}+|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{p}|^2-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{p}+|\overrightarrow{b}|^2=|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2$.　$\therefore 2|\overrightarrow{p}|^2-2(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{p}=0$

よって $|\overrightarrow{p}|^2-(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{p}=0$.　$\therefore |\overrightarrow{p}|^2-2\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right)\cdot\overrightarrow{p}+\left|\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right|^2=\left|\dfrac{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}{2}\right|^2$

$\left|\overrightarrow{p} - \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}\right|^2 = \left(\dfrac{|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|}{2}\right)^2$. よって $\overrightarrow{c} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}}{2}$, $r = \dfrac{|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|}{2}$. 解答参照