科目	数学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 × 2)
(1) $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$

解答

$$f(x) = (1 + \sin x)^{\frac{1}{2}} \text{ であるので } f'(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \sin x}}$$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\log x - 1}$

解答

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{(\log x - 1)^2} = \frac{-1}{x(\log x - 1)^2}$$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{0} (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x)dx$

解答

$$\int_{-2}^{0} (x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2\right]_{-2}^{0} \text{ (ここまでで 3 点)}$$
$$= \frac{32}{5} - 16 + 16 - 8 = -\frac{8}{5}$$

(2) $\displaystyle\int x^3 \log x dx$

解答

$$\int x^3 \log x dx = \frac{1}{4}x^4 \log x - \int \frac{1}{4}x^4 \cdot \frac{1}{x} dx \text{(ここまでで 3 点)} = \frac{1}{4}x^4 \log x - \frac{1}{16}x^4 + C$$

積分定数 C がないとき 4 点

科目	数学	分野	微分積分	２枚目 ３枚中	受検番号		小計		合計	

3

極限値 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x$ を求めよ。(5 点)

解答

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \tan x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2 \sin x \cos x}{- \sin x} = 0$$

4

$f(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x}}$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x, y)$
解答
$f_x(x, y) = -\dfrac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}$
(2) $f_y(x, y)$
解答
$f_y(x, y) = \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{xy}}$
(3) $f_{xx}(x, y)$
解答
$f_{xx}(x, y) = \dfrac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}} y^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{y}}{4x^2\sqrt{x}}$
(4) $f_{xy}(x, y)$
解答
$f_{xy}(x, y) = -\dfrac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-1}{4x\sqrt{xy}}$
(5) $f_{yy}(x, y)$
解答
$f_{yy}(x, y) = -\dfrac{1}{4} x^{-\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{-1}{4y\sqrt{xy}}$

科目	数学	分野	微分積分	３枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\iint_D \sin y dxdy$, D は不等式 $0 \leqq y \leqq x, x+y \leqq \frac{\pi}{2}$ で表される領域。

解答

D は不等式 $y \leqq x \leqq \frac{\pi}{2} - y, 0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{4}$ で表される。よって

$\displaystyle\iint_D \sin y dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin y dx \right\} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [x]_y^{\frac{\pi}{2}-y} \sin y dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{2} - 2y\right) \sin y dy$(ここまでで 5 点) $\displaystyle= \left[-(\frac{\pi}{2} - 2y)\cos y\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos y \cdot (-2) dy = \frac{\pi}{2} - 2[\sin y]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$

(2) $\iint_D \left\{y^2 + (x+1)^2\right\} dxdy$, D は不等式 $x^2 + y^2 \leqq 1$ で表される領域。

解答

極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に変換するとヤコビアンは r、範囲は $0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる。$y^2 + (x+1)^2 = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + 2r\cos\theta + 1 = r^2 + 2r\cos\theta + 1$

$\displaystyle\iint_D (y^2 + (x+1)^2) dxdy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 (r^2 + 2r\cos\theta + 1) r dr \right\} d\theta$(ここまでで 4 点)

$\displaystyle= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4 + \frac{2}{3}r^3\cos\theta + \frac{1}{2}r^2\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\cos\theta\right) d\theta$(ここまでで 7 点)

$\displaystyle= \left[\frac{3}{4}\theta + \frac{2}{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi$

1

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & a & -a \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ の行列式 $|A|$ を求めよ。(5 点)

解答

$|A| = 2 \cdot (-3) \cdot 4 + a \cdot 0 \cdot 0 - a \cdot 1 \cdot 1 - (-a) \cdot (-3) \cdot 0 - a \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = -5a - 24$
よって行列式は $-5a - 24$

(2) $a = -5$ のときつまり $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ のときに A の逆行列を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -12 & 25 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

よって $A^{-1} = \begin{pmatrix} -12 & 25 & 15 \\ -4 & 8 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ となる。軽微な計算ミスは一回につきマイナス２点。

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式 $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(7-\lambda)+1 = \lambda^2 - 12\lambda + 36 = (\lambda-6)^2 = 0$ の解は $\lambda = 6$
つまり固有値は 6 となる。(ここまでで 5 点)

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると

$$\begin{pmatrix} 5-6 & 1 \\ -1 & 7-6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

よって $-x+y=0$ を満たせばよい。
$y=c$ とすると $x=c$ となるから固有ベクトルは $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる。c は 0 以外の任意の定数。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目 ／ ２枚中	受検番号		小計		合計	

微分方程式の問題では $x' = \dfrac{dx}{dt}, x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ とする。

1

次の微分方程式の一般解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $x' = e^t(x - x')$

解答

$(1 + e^t)x' = xe^t$

$\frac{x'}{x} = \frac{e^t}{e^t+1}$ 積分して $\displaystyle\int \frac{x'}{x}dt = \int \frac{1}{x}dx = \log|x|, \int \frac{e^t}{e^t+1} = \log(e^t + 1) + c_1$

よって $\log|x| = \log(e^t + 1) + c_1$(ここまでで 3 点)

$x = \pm e^{c_1}(e^t + 1), \pm e^{c_1} = c$ とすると

$x = c(e^t + 1)$ が解である。(c_1, c は任意の定数)

(2) $x'' + 2x' + x = \cos t$

解答

特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ よって特性解は $\lambda = -1$ の重解。斉次の一般解は $x = (c_1 + c_2t)e^{-t}$ となる。(ここまでで 2 点)

特殊解を $x = A\sin t + B\cos t$ とすると $x' = A\cos t - B\sin t$, $x'' = -A\sin t - B\cos t$ これを方程式に代入して $-A\sin t - B\cos t + 2A\cos t - 2B\sin t + A\sin t + B\cos t = \cos t$

連立方程式 $\begin{cases} -A - 2B + A = 0 \\ -B + 2A + B = 1 \end{cases}$ を解くと $A = \frac{1}{2}, B = 0$

よって特殊解は $x = \frac{1}{2}\sin t$ (特殊解のみ正しい時 2 点)

一般解は $x = (c_1 + c_2t)e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t$

(c_1, c_2 は任意の定数。)

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

2

次の微分方程式を与えられた初期条件の下で解け。(5 点 $\times 2$)

(1) $x't - 3x + 2t = 0 (t = 1$ のとき $x = 2)$

解答

まず $x't - 3x = 0$ の一般解を求める。$\frac{x'}{x} = \frac{3}{t}$ を積分して $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3}{t} dt$

$\log|x| = 3\log|t| + c_1$

$x = c_2 t^3$ となる。$(c_1, c_2$ は任意の定数)(ここまで 2 点)

$x = ut^3$ とする。$x' = u't^3 + 3ut^2$ である。これを方程式に代入すると $3ut^3 + u't^4 - 3ut^3 + 2t = 0$

整理すると $u' = -2t^{-3}$ よって $u = \int(-2t^{-3})dt = t^{-2} + c_3$ つまり $x = (t^{-2} + c_3)t^3$ となる。(ここまで 4 点)

$t = 1, x = 2$ を代入すると $2 = (1 + c_3)$ より $c_3 = 1$

よって解は $x = (t^{-2} + 1)t^3 = t + t^3$ となる。

(2) $x'' + x' - 2x = 0, (t = 0$ のとき $x = 4, x' = 1)$

解答

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$ よって特性解は $\lambda = 1, -2$ となる。

一般解は $x = c_1 e^t + c_2 e^{-2t}(c_1, c_2$ は任意の定数)(ここまで 3 点)

微分して $x' = c_1 e^t - 2c_2 e^{-2t}$

これらに初期条件を代入すると

$$\begin{cases} 4 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1 - 2c_2 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $c_1 = 3, c_2 = 1$

よって解は $x = 3e^t + e^{-2t}$ となる。

平成３０年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（前期）

科目	数学	分野	応用数学	１枚目／１枚中	受検番号		小計		合計	

1　スカラー場$\varphi=\log(xyz)$，ベクトル場$\boldsymbol{A}=xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$ がある．
次のものを求めよ．（10 点）

(1) $\mathrm{grad}\varphi$　(2) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}$　(3) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$　(4) $\nabla^2\varphi$　(5) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})$

(1)$\mathrm{grad}\varphi=\mathrm{grad}(\log x+\log y+\log z)=\frac{1}{x}\boldsymbol{i}+\frac{1}{y}\boldsymbol{j}+\frac{1}{z}\boldsymbol{k}$　(+2)

(2)$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=y+z+x$　(+2)

(3)$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}=-y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k}$　(+2)

(4) $\nabla^2\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{z^2}$　(+2)

(5) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A}+\varphi(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\left(\frac{1}{x}\boldsymbol{i}+\frac{1}{y}\boldsymbol{j}+\frac{1}{z}\boldsymbol{k}\right)\cdot(xy\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k})+\{\log(xyz)\}(y+z+x)$

$=(y+z+x)+(y+z+x)\log(xyz)=(x+y+z)(1+\log(xyz))$　(+2)

2

始点P(1,1,0)，終点Q(2,0,2) とする線分に沿ってスカラー場$\varphi=ze^{xy}$ の線積分$\int_{PQ}\varphi ds$を求めよ．
ただしここでsは弧長とする．　（10 点）

P(1,1,0) → Q(2,0,2)となる経路は
C: $\boldsymbol{r}=(1+t)\boldsymbol{i}+(1-t)\boldsymbol{j}+2t\boldsymbol{k}$　$(0\le t\le 1)$　と表される．　(+2)

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,　$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}=\sqrt{6}$　(2+1)

経路に沿って $\varphi=2te^{(1+t)(1-t)}=2te^{1-t^2}$　(+2)
PQ に沿ってφの線積分

$$\int_C\varphi ds=\int_0^1 2te^{1-t^2}\sqrt{6}\,dt=\sqrt{6}\left[-e^{1-t^2}\right]_0^1=\sqrt{6}(e-1)$$

(+1)　(+2)