科目	数学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 $\times$ 2)

(1) $f(x) = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1}$

解答

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sqrt{x^2-1})^2}(\sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(2) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

解答

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2} = -\frac{1}{1+\sin x}$$

約分していない場合は 4 点とする。

2

次の積分をせよ。(5 点 $\times$ 2)

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$

解答

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \text{（ここまでで 3 点）}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

(2) $\displaystyle\int (x+1)(x+2)(x+3)dx$

解答

$$\int (x+1)(x+2)(x+3)dx = \int (x^3+6x^2+11x+6)dx = \frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$$

積分定数 C がないとき 4 点

科目	数学	分野	微分積分	２枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

3

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{e-e^x}{\sqrt{x^2-1}}$ を求めよ。(5 点)

解答

$$\lim_{x\to1}\frac{e-e^x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to1}\frac{-e^x}{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}=\lim_{x\to1}\frac{-e^x\sqrt{x^2-1}}{x}=0$$

4

$f(x,y)=\frac{1}{e^x+e^{-y}}$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x,y)$

解答

$$f_x(x,y)=\frac{-e^x}{(e^x+e^{-y})^2}$$

(2) $f_y(x,y)$

解答

$$f_y(x,y)=\frac{e^{-y}}{(e^x+e^{-y})^2}$$

(3) $f_{xx}(x,y)$

解答

$$f_{xx}(x,y)=\frac{-e^x(e^x+e^{-y})^2+2e^{2x}(e^x+e^{-y})}{(e^x+e^{-y})^4}=\frac{-e^{2x}-e^{x-y}+2e^{2x}}{(e^x+e^{-y})^3}=\frac{e^{2x}-e^{x-y}}{(e^x+e^{-y})^3}$$

(4) $f_{xy}(x,y)$

解答

$$f_{xy}(x,y)=\frac{-2e^x(e^x+e^{-y})e^{-y}}{(e^x+e^{-y})^4}=\frac{-2e^{x-y}}{(e^x+e^{-y})^3}$$

(5) $f_{yy}(x,y)$

解答

$$f_{yy}(x,y)=\frac{-e^{-y}(e^x+e^{-y})^2+2e^{-2y}(e^x+e^{-y})}{(e^x+e^{-y})^4}=\frac{-e^{x-y}-e^{-2y}+2e^{-2y}}{(e^x+e^{-y})^3}=\frac{e^{-2y}-e^{x-y}}{(e^x+e^{-y})^3}$$

科目	数学	分野	微分積分	３枚目 / ３枚中	受検番号		小計		合計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D \cos x dxdy$, D は y 軸と 2 直線 $y=\frac{\pi}{2}-x$, $y=x-\frac{\pi}{2}$ で囲まれた領域。

解答

D は不等式 $x-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}-x, 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で表される。よって

$$\iint_D \cos x dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \cos x dy \right\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y]_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x-x+\frac{\pi}{2}\right) \cos x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi-2x)\cos x dx \text{(ここまでで 5 点)}$$

$$= [(\pi-2x)\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot (-2) dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 2\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$$

(2) $\displaystyle\iint_D \left(x^2+xy+y^2\right) dxdy$, D は不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$,$x \geqq 0$ で表される領域。

解答

極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ に変換するとヤコビアンは r、範囲は $0 \leqq r \leqq 2, -\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ となる。

$x^2+xy+y^2 = r^2(\cos^2\theta+\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta) = r^2(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta)$

$$\iint_D (x^2+xy+y^2)dxdy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^2 r^3 \left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) dr \right\} d\theta \text{(ここまでで 4 点)}$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^2 (1+\frac{1}{2}\sin 2\theta) d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right) d\theta \text{(ここまでで 7 点)}$$

$$= 4\left[\theta-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\right) = 4\pi$$

科目	数学	分野	線形代数	１枚目 ／ ２枚中	受検番号		小計		合計	

1

(1) 連立方程式 $\begin{cases} 3x+2y+z=0 \\ x+y-z=0 \\ 2x+ky+6z=0 \end{cases}$ に $x=y=z=0$ 以外の解があるような定数 k を求めよ。
(5 点)

解答

係数行列の行列式が 0 のときに $x=y=z=0$ 以外の解を持つから

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & k & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 6+2\cdot(-1)\cdot 2+1\cdot 1\cdot k-1\cdot 1\cdot 2-2\cdot 1\cdot 6-3\cdot(-1)\cdot k=4k=0$$

よって $k=0$ のときに $x=y=z=0$ 以外の解を持つ。

(2) k の値が (1) で求めた値だったとき方程式の解を求めよ。(5 点)

解答

拡大係数行列を基本変形していくと

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。これは連立方程式が $\begin{cases} x+3z=0 \\ y-4z=0 \end{cases}$ となることを意味する。

よって t を任意の数として $\begin{cases} x=-3t \\ y=4t \\ z=t \end{cases}$ が解である。

基本変形での軽微な計算ミスは一回につきマイナス 2 点。

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式 $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)-1 = \lambda^2-5=0$ の解は $\lambda = \pm\sqrt{5}$

つまり固有値は $\lambda = \pm\sqrt{5}$ となる。(ここまでで 5 点)

固有ベクトルを $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすると $\lambda = \sqrt{5}$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2-\sqrt{5} & 1 \\ 1 & -2-\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-\sqrt{5})x+y \\ x+(-2-\sqrt{5})y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(2-\sqrt{5})x+y=0$ を満たせばよいから、固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$ となる。

また、$\lambda = -\sqrt{5}$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 1 \\ 1 & -2+\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{5})x+y \\ x+(-2+\sqrt{5})y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(2+\sqrt{5})x+y=0$ を満たせばよいから固有ベクトルは $c_2\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{5}+2 \end{pmatrix}$ となる。

ここで c_1, c_2 は 0 以外の任意の実数である。

固有値が正解で固有ベクトルが片方のみ正解のときは 8 点、固有値の片方とそれに対応する固有ベクトルが正解のときは 5 点、固有値の片方のみ正解の時は 3 点とする。

平成３０年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目 / ２枚中	受検番号		小計		合計	

微分方程式の問題では $x' = \dfrac{dx}{dt}, x'' = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ とする。

1

次の微分方程式の一般解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $t^3x' + 3 = t^2x$

解答

まず、$t^3x' = t^2x$ を解く。

変形して $\dfrac{x'}{x} = \dfrac{1}{t}$ 積分して $\log|x| = \log|t| + c_1$

$x = \pm e^{c_1}t$ となる。(ここまでで 3 点)

$x = ut$ とすると $x' = u't + u$

これを $t^3x' + 3 = t^2x$ に代入して

$u't^4 + ut^3 + 3 = ut^3$

$u' = -3t^{-4}$

$u = -3\displaystyle\int t^{-4}dt = t^{-3} + c$

よって $x = (t^{-3} + c)t = t^{-2} + ct$ が解となる。(c_1, c は任意の定数)

(2) $x'' - 5x + 4e^t = 0$

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 5 = 0$

よって特性解は $\lambda = \pm\sqrt{5}$。

斉次の一般解は $x = c_1e^{\sqrt{5}t} + c_2e^{-\sqrt{5}t}$ となる。(ここまでで 2 点)

特殊解を $x = Ae^t$ とすると $x' = Ae^t, x'' = Ae^t$ これを方程式に代入して $Ae^t - 5Ae^t + 4e^t = 0$

$A = 1$ となるから特殊解は $x = e^t$

(特殊解のみ正しい時 2 点)

一般解は $x = c_1e^{\sqrt{5}t} + c_2e^{-\sqrt{5}t} + e^t$

(c_1, c_2 は任意の定数。)

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目／２枚中	受検番号		小計		合計	

2

次の微分方程式を与えられた初期条件の下で解け。(5 点 ×2)

(1) $x' = x\sin t, (t = 0$ のとき $x = 1)$

解答

変形して $\dfrac{x'}{x} = \sin t$

これを積分して $\log|x| = -\cos t + c_1$

$x = \pm e^{c_1} e^{-\cos t}$(ここまでで 3 点)

ここで $x = c_2 e^{-\cos t}$ として初期条件を代入すると $1 = c_2 e^{-\cos 0} = c_2 e^{-1}$ よって $c_2 = e$

解は $x = e^{1-\cos t}$ となる。

(2) $x'' + 8x' = 0, (t = 0$ のとき $x = 1, x' = 16)$

解答

特性方程式は $\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(\lambda + 8) = 0$ よって特性解は $\lambda = 0, -8$ となる。

一般解は $x = c_1 + c_2 e^{-8t}$(c_1, c_2 は任意の定数)(ここまで 3 点)

微分して $x' = -8c_2 e^{-8t}$

これらに初期条件を代入すると

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 16 = -8c_2 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $c_1 = 3, c_2 = -2$

よって解は $x = 3 - 2e^{-8t}$ となる。

科目	数学	分野	応用数学	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		合計	

1

(1)ベクトル場 $\boldsymbol{A_1} = x\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{A_2} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A_3} = z^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{A_4} = \mathrm{grad}(e^{xyz})$ がある．

(a)すべての位置で発散が 0 となるベクトル場をすべて選べ．（2 点）

(b)すべての位置で回転が $\boldsymbol{0}$ となるベクトル場をすべて選べ．（2 点）

(2) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = ax^2\boldsymbol{i} + axy\boldsymbol{j} + \sin(xyz)\boldsymbol{k}$ の発散$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ について，点 $\mathrm{P}(2,1,\frac{\pi}{2})$における値は点 Q(1,2,0) における値と同じであった．定数aを求めよ．（6 点）

(1)(a) $\boldsymbol{A_1}, \boldsymbol{A_3}$ 　$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A_2} = 2x + 2y + 2z,\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A_4} = \boldsymbol{\nabla}^2 e^{xyz} = (y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)e^{xyz})$

(b) $\boldsymbol{A_2}, \boldsymbol{A_4}$ 　$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A_1} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A_3} = 2y\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A_4} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\varphi = \boldsymbol{0})$

(2) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 3ax + xy\cos(xyz)$ 　(+2)

$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})_P = 6a - 2$ 　$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})_Q = 3a + 2$ 　(+2)

$(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})_P = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})_Q$ より$6a - 2 = 3a + 2$ 　$a = \frac{4}{3}$ 　(+2)

2

始点$\mathrm{P}(1,0,-2)$，終点$\mathrm{Q}(4,1,-1)$ とする線分に沿ってスカラー場$\varphi = \frac{5y}{\sqrt{2x-z}}$ の線積分$\int_{PQ}\varphi ds$を求めよ．

ただしここでsは弧長とする．（10 点）

$\mathrm{P}(1,0,-2) \to \mathrm{Q}(4,1,-1)$となる経路は

C: $\boldsymbol{r} = (1+3t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (-2+t)\boldsymbol{k}$ 　$(0 \le t \le 1)$ 　と表される． 　(+2)

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 3\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$, 　$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{11}$ 　(+2)

PQ に沿ってφの線積分

$$\int_C \varphi ds = \int_C \varphi\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt = \int_0^1 \frac{5t}{\sqrt{5t+4}}\sqrt{11}\,dt \quad \ldots.(A) \qquad (+3)$$

ここで $\sqrt{5t+4} = u$とおく．$5t + 4 = u^2$，$2udu = 5dt$，$t: 0 \to 1$ で $u: 2 \to 3$

よって

$$(A) = \frac{2\sqrt{11}}{5}\int_2^3 (u^2 - 4)du = \frac{2\sqrt{11}}{5}\left[\frac{u^3}{3} - 4u\right]_2^3 = \frac{14\sqrt{11}}{15}$$

(+2) 　(+1)

$$\left(5t + 4 = u\text{とおいて}(A) = \frac{\sqrt{11}}{5}\int_4^9 \frac{u-4}{\sqrt{u}}du = \frac{\sqrt{11}}{5}\int_4^9 \left(\sqrt{u} - \frac{4}{\sqrt{u}}\right)du \quad \text{としても可}\right)$$

(+2)