平成３１年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜 (前期)

数学合計

科目	数学	分野	微分積分	1枚目 / 3枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 ×2)

(1) $f(x) = \sin^{-1}\dfrac{1}{x+1}$ ($x \geqq 0$ とする)

解答

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^2}} \cdot \dfrac{-1}{(x+1)^2}$(ここまでで 3 点) $= \dfrac{-1}{(x+1)\sqrt{(x+1)^2-1}} = \dfrac{-1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

(2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

解答

$f(x) = x^{-1}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ なので

$f'(x) = -x^{-2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + x^{-1}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = -x^{-2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}} + (x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$(ここまででも正解) $= \dfrac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

$\left(\dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\right.$は 3 点とする。$\left.\right)$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int_2^3 (x-1)\log x dx$

解答

$\displaystyle\int_2^3 (x-1)\log x dx = \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\log x\right]_2^3 - \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\frac{1}{x}dx$

$\displaystyle= \frac{3}{2}\log 3 - \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx$(ここまでで 2 点)

$\displaystyle= \frac{3}{2}\log 3 - \left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_2^3 = \frac{3}{2}\log 3 - \frac{1}{4}$

(2) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x dx$

解答

$\sin x = t$ とすると $\cos x dx = dt$ よって

$\displaystyle\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C$(ここまでで 3 点) $\displaystyle= \frac{1}{4}\sin^4 x + C$

積分定数 C がないとき 4 点。$\dfrac{1}{32}\cos 4x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C$ でも正解。

科目	数学	分野	微分積分	２枚目／３枚中	受検番号		小計	

3

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x-1)}{e^x-1}$ を求めよ。(5 点)

解答

ロピタルの定理により

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x-1)}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x(\cos x-1)-e^x\sin x}{e^x}=\frac{1\cdot(1-1)-1\cdot 0}{1}=0$$

4

$f(x,y)=\sqrt{x+y^2}$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x,y)$

解答

$$f_x(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$$

(2) $f_y(x,y)$

解答

$$f_y(x,y)=\frac{1}{2}\left(x+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(2y)=\frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$$

(3) $f_{xx}(x,y)$

解答

$$f_{xx}(x,y)=-\frac{1}{4}\left(x+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

(4) $f_{xy}(x,y)$

解答

$$f_{xy}(x,y)=-\frac{1}{4}\left(x+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}(2y)=-\frac{y}{2}\left(x+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

(5) $f_{yy}(x,y)$

解答

$f_{yy}(x,y)=(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}y(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=(x+y^2)^{-\frac{1}{2}}-y^2(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}$(ここまででも正解)

$=(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}(x+y^2-y^2)=x(x+y^2)^{-\frac{3}{2}}$

科目	数学	分野	微分積分	３枚目 ３枚中	受検番号		小計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D \cos(x+y)dxdy$, D は 4 本の直線 $y=x+\frac{\pi}{2}, y=x-\frac{\pi}{2}, y=-x+\frac{\pi}{2}, y=-x-\frac{\pi}{2}$ で囲まれた領域。

解答

D は $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ では $x-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}-x$ となり、$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq 0$ では $-x-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq x+\frac{\pi}{2}$ となる。

$$\iint_D \cos(x+y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y)dy\right\}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left\{\int_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+x} \cos(x+y)dy\right\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin(x+y)\right]_{x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left[\sin(x+y)\right]_{-x-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left\{\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 - \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \left\{\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right) + 1\right\}dx \text{(ここまでで 5 点)}$$

$$= \left[x + \frac{1}{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[x - \frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(2) $\displaystyle\iint_D \left(x+y^2\right)dxdy$, D は不等式 $x^2+y^2 \leqq 1, x \geqq 0, y \geqq 0$ で表される領域。

解答

極座標 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ に変換するとヤコビアンは r、範囲は $0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ となる。

$$\iint_D (x+y^2)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\int_0^1 (r\cos\theta + r^2\sin^2\theta)rdr\right\}d\theta \text{(ここまでで 4 点)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3}r^3\cos\theta + \frac{1}{4}r^4\sin^2\theta\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta\right)d\theta \text{(ここまでで 7 点)}$$

$$= \left[\frac{1}{3}\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{16}$$

平成３１年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（前期）

科目	数学	分野	線形代数	１枚目 ／ ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

連立方程式 $\begin{cases} x+ky+3z=0 \\ 2x-y=0 \\ x+2y+5z=0 \end{cases}$ が $x=y=z=0$ 以外の解をもつような定数 k の値を求めよ。(5 点)

また、その時の解を求めよ。(5 点)

解答

$x=y=z=0$ 以外の解を持つとき、係数行列式は 0 となる。よって $\begin{vmatrix} 1 & k & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 5+2\cdot 2\cdot 3+k\cdot 0\cdot 1-3\cdot(-1)\cdot 1-2\cdot k\cdot 5-1\cdot 2\cdot 0=10-10k=0$ つまり $k=1$ となる。

以上 5 点

拡大係数行列を行基本変形していく。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これは $\begin{cases} x+z=0 \\ y+2z=0 \end{cases}$ を意味している。

よって解は $\begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=t \end{cases}$ ただし t は任意の実数。

基本変形中の計算ミス一箇所のとき 3 点、二箇所以上ミスした時 0 点

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式は $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda = 0$ よって固有値は $\lambda = 0, 5$ (ここまで 5 点)

$\lambda = 0$ のとき $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $x + y = 0$ よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 5$ のとき $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $-2x + 3y = 0$ よって $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

ただし c_1, c_2 は 0 位外の任意の実数。

固有値が両方とも正解で固有ベクトルの片方のみ正解のとき、8 点。固有値が片方のみ正解で対応する固有ベクトルが正解のとき 5 点。固有値が片方のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 0 点。固有値のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 5 点。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目／２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の微分方程式を解け。(5 点 ×2)

(1) $\frac{dx}{dt} - x = 2t - t^2$

解答

斉次の微分方程式 $\frac{dx}{dt} - x = 0$ を解くと

$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 1$

$\int \frac{dx}{x} = \int dt$

$\log|x| = t + c_1$

$x = c_2 e^t$ が解である。$x = ue^t$ とすると、$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}e^t + ue^t$

これを微分方程式に代入すると、$\frac{du}{dt}e^t + ue^t - ue^t = 2t - t^2$

$\frac{du}{dt} = (2t - t^2)e^{-t}$

$u = \int (2t - t^2)e^{-t}dt$

$= -(2t-t^2)e^{-t} + \int(2-2t)e^{-t}dt = -(2t-t^2)e^{-t} - (2-2t)e^{-t} + \int(-2)e^{-t}dt = (-2t+t^2-2+2t+2)e^{-t} + c_3 = (t^2)e^{-t} + c_3$ (ここまでで 4 点、c_3 が無い場合は 3 点)

$x = ue^t = t^2 + c_3 e^t$

c_1, c_2, c_3 は任意の定数。

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = t^2 - 4t + 2$

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ よって特性解は $\lambda = 1$ の重解。つまり、斉次の一般解は $x = (c_1 + c_2 t)e^t$ となる。

特殊解を $x = at^2 + bt + c$ とすると $\frac{dx}{dt} = 2at + b$, $\frac{d^2x}{dt^2} = 2a$ これを方程式に代入すると $2a - (4at + 2b) + at^2 + bt + c = t^2 - 4t + 2$ これより $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ つまり特殊解は $x = t^2$

一般解は $x = (c_1 + c_2 t)e^t + t^2$ 斉次の一般解と特殊解の片方のみ求めているときは 3 点とする。

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

次の微分方程式の与えられた初期条件での解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $(t^2+1)\frac{dx}{dt} = tx$ ($t=1$ のとき $x=\sqrt{2}$)

解答

$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{t}{t^2+1}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{t}{t^2+1}dt$

$\log|x| = \frac{1}{2}\log(t^2+1)+c_1$

$x = c_2\sqrt{t^2+1}$(ここまでで 3 点)

初期条件を代入すると $\sqrt{2} = c_2\sqrt{2}$ よって $c_2 = 1$

特殊解は $x = \sqrt{t^2+1}$

$x = \pm\sqrt{t^2+1}$ または $x^2 = t^2+1$ は 4 点。

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} + 25x = 0$ ($t=0$ のときに $x=-3, \frac{dx}{dt} = 10$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 + 25 = 0$ よって $\lambda = \pm 5i$

一般解は $x = c_1\sin 5t + c_2\cos 5t$ となる。(ここまでで 3 点)

$\frac{dx}{dt} = 5c_1\cos 5t - 5c_2\sin 5t$

初期条件を代入すると $\begin{cases} c_2 = -3 \\ 5c_1 = 10 \end{cases}$

より $c_1 = 2, c_2 = -3$

特殊解は $x = 2\sin 5t - 3\cos 5t$ となる。

科目	数学	分野	応用数学	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		分野計	１枚目のみ

1 スカラー場 $\varphi=\exp(xy)=e^{xy}$，ベクトル場 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+yz^2\boldsymbol{j}+zx^2\boldsymbol{k}$ について，次のものを求めよ．ただし，$\nabla=\boldsymbol{i}(\partial/\partial x)+\boldsymbol{j}(\partial/\partial y)+\boldsymbol{k}(\partial/\partial z)$ である．（10 点）

(1) $\nabla\varphi$　(2) $\nabla\cdot\ \boldsymbol{A}$　(3) $\nabla\times\ \boldsymbol{A}$　(4) $\nabla^2\varphi$　(5) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})$

(1) $\nabla\varphi=ye^{xy}\boldsymbol{i}+xe^{xy}\boldsymbol{j}$　(+2)

(2) $\nabla\cdot\ \boldsymbol{A}=y^2+x^2+z^2$　(+2)

(3) $\nabla\times\ \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & yz^2 & zx^2\end{vmatrix}=-2yz\boldsymbol{i}-2zx\boldsymbol{j}-2xy\boldsymbol{k}$　(+2)

(4) $\nabla^2\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)e^{xy}=(y^2+x^2)e^{xy}$　(+2)

(5) $\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{A})=(\nabla\varphi)\cdot\ \boldsymbol{A}+\varphi(\nabla\cdot\ \boldsymbol{A})=\ xy^3e^{xy}+xyz^2e^{xy}+e^{xy}(y^2+x^2+z^2)$
$=e^{xy}(\ xy^3+\ xyz^2+x^2+z^2)$　(+2)

2 曲線 C:　$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$　$(0\le t\le 1)$ に沿って，ベクトル場 $\boldsymbol{A}=7zx\boldsymbol{i}-8xy^2\boldsymbol{j}+(y^2+2z)\ \boldsymbol{k}$ の線積分

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．（10 点）

C に沿って，$\boldsymbol{A}=7t^4\boldsymbol{i}-8t^5\boldsymbol{j}+(t^4+2t^3)\ \boldsymbol{k}$

$d\boldsymbol{r}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt=(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})dt$　(+4)

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}}(7t^4-16t^6+3t^6+6t^5)\,dt \qquad (+3)$$

$$=\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{1}}(-13t^6+6t^5+7t^4)\,dt$$

$$=\frac{19}{35} \qquad (+3)$$