令和２年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（前期,
先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む）

数学合計

科目	数学	分野	微分積分	１枚目／３枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 ×2)

(1) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

解答

$$f'(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{1+\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}x+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}(\text{ここまでで 3 点})=\frac{1}{x^2+x+1}$$

(2) $f(x)=e^x\sqrt{x^2+1}$

解答

$$f'(x)=e^x\sqrt{x^2+1}+e^x\cdot\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x)=e^x\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)(\text{ここまででも正解})=\frac{e^x(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos x dx$

解答

$\sin x=t$ とすると、$\cos x dx=dt$, 積分範囲は $0\leqq t\leqq 1$ となる。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos x dx=\int_0^1 t^7 dt=\left[\frac{1}{8}t^8\right]_0^1=\frac{1}{8}$$

となる。

(2) $\displaystyle\int(x-1)\log x dx$

解答

部分積分により

$$\int(x-1)\log x dx=\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\log x-\int\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\frac{1}{x}dx=\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\log x-\int\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\log x-\frac{1}{4}x^2+x+C$$

積分定数 C がないとき 4 点。

科目	数学	分野	微分積分	２枚目／３枚中	受検番号		小計	

3

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{1-\cos x}$ を求めよ。(5 点)

解答

ロピタルの定理により
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos x}-e}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x e^{\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}(-e^{\cos x})=-e$$

4

$f(x,y)=\log\left|\frac{x-y}{x+y}\right|$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x,y)$

解答

$f(x,y)=\log|x-y|-\log|x+y|$ と変形する。
$f_x(x,y)=\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}$(ここまででも正解) $=\dfrac{2y}{x^2-y^2}$

(2) $f_y(x,y)$

解答

$f_y(x,y)=\dfrac{-1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}$(ここまででも正解) $=\dfrac{-2x}{x^2-y^2}$

(3) $f_{xx}(x,y)$

解答

$f_{xx}(x,y)=\dfrac{-1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}$(ここまででも正解) $=\dfrac{-4xy}{(x^2-y^2)^2}$

(4) $f_{xy}(x,y)$

解答

$f_{xy}(x,y)=\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}$(ここまででも正解) $=\dfrac{2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)^2}$

(5) $f_{yy}(x,y)$

解答

$f_{yy}(x,y)=\dfrac{-1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(x+y)^2}$(ここまででも正解) $=\dfrac{-4xy}{(x^2-y^2)^2}$

科目	数学	分野	微分積分	３枚目 / ３枚中	受検番号		小計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D xe^y dxdy$, D は 3 本の直線 $y=1, x=1, x+y=1$ で囲まれた領域。

解答

D は不等式で表すと、$0 \leqq x \leqq 1,\ 1-x \leqq y \leqq 1$ となる。

$$\iint_D xe^y dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_{1-x}^1 xe^y dy \right\} dx = \int_0^1 \left[xe^y \right]_{1-x}^1 dx$$

$= \displaystyle\int_0^1 (ex - xe^{1-x}) dx$(ここまでで 3 点)

$= \displaystyle\left[\frac{1}{2}ex^2 \right]_0^1 - \int_0^1 xe^{1-x} dx = \frac{1}{2}e + \left[xe^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{1-x} dx$(ここまでで 6 点)

$= \displaystyle\frac{1}{2}e + 1 + \left[e^{1-x} \right]_0^1 = 2 - \frac{1}{2}e$

(2) $\displaystyle\iint_D xydxdy$, D は不等式 $x^2+y^2 \leqq 4, 0 \leqq y \leqq x$ で表される領域。

解答

極座標 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ に変換するとヤコビアンは r、範囲は $0 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ となる。

$\displaystyle\iint_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_0^2 (r\cos\theta \cdot r\sin\theta) r dr \right\} d\theta$(ここまでで 4 点)

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{4} r^4 \cos\theta \sin\theta \right]_0^2 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\cos\theta\sin\theta d\theta$(ここまでで 7 点)

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin 2\theta d\theta = \left[-\cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$

科目	数学	分野	線形代数	１枚目／２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

行列 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 3 & 1 \end{pmatrix}$ がある。

(1) この行列の行列式を求めよ。(5 点)

解答

行列式は $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 1\cdot k - 3\cdot 2\cdot k - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 3 = 8 - 7k$

となる。

(2) $k = 1$ のときの逆行列を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 10 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

よって逆行列は $\begin{pmatrix} -1 & 10 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{pmatrix}$ となる。

基本変形中の計算ミス一箇所のとき 3 点、二箇所以上ミスした時 0 点

令和２年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（前期,
先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む）

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式は $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 \\ -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda-7)(\lambda+2) = 0$

よって固有値は $\lambda = 7, -2$ (ここまで 5 点)

$\lambda = 7$ のとき $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $x + 2y = 0$

よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ のとき $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $x - y = 0$

よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ただし c_1, c_2 は 0 位外の任意の実数。

固有値が両方とも正解で固有ベクトルの片方のみ正解のとき、8 点。固有値が片方のみ正解で対応する固有ベクトルが正解のとき 5 点。固有値が片方のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 0 点。固有値のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 5 点。固有ベクトルの解答で任意の実数がかかっていないときは、1 つにつき 1 点減点。

令和２年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（前期,
先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む）

科目	数学	分野	微分方程式

１枚目 ／ ２枚中

受検番号		小計		分野計	

1

次の微分方程式を解け。(5 点 ×2)

(1) $t\frac{dx}{dt} - x = t^2$

解答

斉次の微分方程式 $t\frac{dx}{dt} - x = 0$ を解くと

$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$

$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{t}dt$

$\log|x| = \log|t| + c_1$

$x = c_2 t$ が解である。

$x = ut$ とすると、$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}t + u$

これを微分方程式に代入すると、$\frac{du}{dt}t^2 + ut - ut = t^2$

$\frac{du}{dt} = 1$

$u = t + c$

よって解は $x = ut = t^2 + ct$ となる。

c_1, c_2, c は任意の定数。

文字を書き間違えているときは 3 点。

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 7\frac{dx}{dt} + 6x = 5\sin t - 7\cos t$

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 6) = 0$ よって特性解は $\lambda = 1, 6$。つまり、斉次の一般解は $x = c_1e^t + c_2e^{6t}$ となる。

特殊解を $x = a\sin t + b\cos t$ とすると $\frac{dx}{dt} = a\cos t - b\sin t$, $\frac{d^2x}{dt^2} = -a\sin t - b\cos t$

これを方程式に代入すると $-a\sin t - b\cos t - 7(a\cos t - b\sin t) + 6(a\sin t + b\cos t) = 5\sin t - 7\cos t$

これより $\begin{cases} -a + 7b + 6a = 5 \\ -b - 7a + 6b = -7 \end{cases}$ この連立方程式を解くと

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$

つまり特殊解は $x = \sin t$

一般解は $x = c_1e^t + c_2e^{6t} + \sin t$

斉次の一般解と特殊解の片方のみ求めているときは 3 点とする。

斉次の一般解と特殊解を別に求めているが、それを足した一般解を求めていないときは 4 点とする。

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

次の微分方程式の与えられた初期条件での解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $\frac{dx}{dt} = t^3x^2$ ($t = 0$ のとき $x = 1$)

解答

$\frac{1}{x^2}\frac{dx}{dt} = t^3$

$\int \frac{dx}{x^2} = \int t^3 dt$

$\frac{-1}{x} = \frac{1}{4}t^4 + c_1$

$x = \frac{-1}{\frac{1}{4}t^4+c_1}$(ここまでで 3 点)

初期条件を代入すると $1 = \frac{-1}{c_1}$ よって $c_1 = -1$

特殊解は $x = \frac{-4}{t^4-4}$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2x = 0$ ($t = 0$ のときに $x = 1, \frac{dx}{dt} = \sqrt{2}$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 + 2 = 0$ よって $\lambda = \pm\sqrt{2}i$

一般解は $x = c_1 \sin\sqrt{2}t + c_2 \cos\sqrt{2}t$ となる。(ここまでで 3 点)

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}c_1 \cos\sqrt{2}t - \sqrt{2}c_2 \sin\sqrt{2}t$

初期条件を代入すると $\begin{cases} c_2 = 1 \\ \sqrt{2}c_1 = \sqrt{2} \end{cases}$

より $c_1 = c_2 = 1$

特殊解は $x = \sin\sqrt{2}t + \cos\sqrt{2}t$ となる。

科目	数学	分野	応用数学	1枚目 / 1枚中	受検番号		小計		分野計	1枚目のみ

$\boxed{1}$ スカラー場 $\varphi = y\log x + \sin z$ について，次のものを求めよ．
ただし，$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}(\partial/\partial x) + \boldsymbol{j}(\partial/\partial y) + \boldsymbol{k}(\partial/\partial z)$ である．（10 点）

(1) $\boldsymbol{\nabla}\varphi$　(2) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi$　(3) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi)$

(4) $\mathrm{P}(1, -2, \pi)$においてφの最大変化率を示す方向の単位ベクトル$\boldsymbol{u}$

(1) $\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{y}{x}\boldsymbol{i} + \log x\,\boldsymbol{j} + \cos z\,\boldsymbol{k}$　(+2)

(2) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi = -\frac{y}{x^2} - \sin z$　(+2)

(3) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{0}$　(+2)　（*$\boldsymbol{0}$ はスカラー表記の場合(+1)）

(4) $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)_P = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$,　$|(\boldsymbol{\nabla}\varphi)_P| = \sqrt{5}$, $\boldsymbol{u} = \frac{(\boldsymbol{\nabla}\varphi)_P}{|(\boldsymbol{\nabla}\varphi)_P|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{k})$　（*±はあってもなくても可）

(+2)　(+2)

$\boxed{2}$ 図 1 に示す z=0 平面上の半径 3 の半円経路 C に沿って，ベクトル場 $\boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z\ \boldsymbol{k}$ についての線積分 $\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ．（10 点）

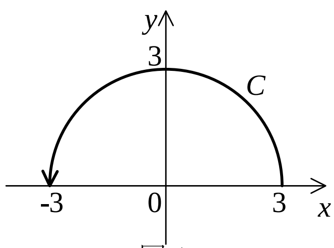

図 1

半円経路 C は$\boldsymbol{r} = 3\cos t\,\boldsymbol{i} + 3\sin t\,\boldsymbol{j}$　$(0 \le t \le \pi)$　(+2)

経路 C に沿って $\boldsymbol{A} = 9\cos^2 t\,\boldsymbol{i} + 3\sin t\,\boldsymbol{j} - 0\ \boldsymbol{k}$　(+2)

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -3\sin t\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j}$　(+2)

$$\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t=0}^{\pi}(9\cos^2 t\,\boldsymbol{i} + 3\sin t\,\boldsymbol{j} - 0\ \boldsymbol{k})\cdot(-3\sin t\,\boldsymbol{i} + 3\cos t\,\boldsymbol{j})dt$$

(+2)

$$= \int_{t=0}^{\pi}(-27\cos^2 t\sin t + 9\sin t\cos t)dt = \left[9\cos^3 t + \frac{9}{2}\sin^2 t\right]_0^{\pi} = -18$$

(+2)