令和２年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜 (後期)

数学合計

科目	数　学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 ×2)

(1) $f(x)=(x^3-3x^2+6x-6)e^x$

解答

$f'(x)=(x^3-3x^2+6x-6)'e^x+(x^3-3x^2+6x-6)(e^x)'$
$=(3x^2-6x+6)e^x+(x^3-3x^2+6x-6)e^x$(ここまでで 3 点)
$=x^3e^x$

(2) $f(x)=x\log(x^2+1)+2\tan^{-1}x$

解答

$$f'(x)=\log(x^2+1)+x\cdot\frac{2x}{x^2+1}+2\frac{1}{x^2+1}=\log(x^2+1)+\frac{2x^2+2}{x^2+1}=\log(x^2+1)+2$$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx$

解答

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x dx=\left[x^2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin x dx$
$\displaystyle=\frac{\pi^2}{4}-[-2x\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$(ここまでで 3 点)
$\displaystyle=\frac{\pi^2}{4}-2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$\displaystyle=\frac{\pi^2}{4}-2$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+1}dx$

解答

$\displaystyle\int\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}dx$
$\displaystyle=\frac{1}{3}\log|x^3+1|+C$

積分定数 C がないとき 4 点。

科目	数　学	分野	微分積分	２枚目 ３枚中	受検番号		小計	

3

極限値 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2)$ を求めよ。(5 点)

解答

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^4+x^2+1}-x^2)(\sqrt{x^4+x^2+1}+x^2)}{\sqrt{x^4+x^2+1}+x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2+1-x^4}{\sqrt{x^4+x^2+1}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}+1}=\frac{1}{2}$$

4

$f(x,y)=x\log(y^2+x)$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x,y)$

解答

$$f_x(x,y)=\log(y^2+x)+x\cdot\frac{1}{y^2+x}=\log(y^2+x)+\frac{x}{y^2+x}$$

(2) $f_y(x,y)$

解答

$$f_y(x,y)=\frac{2xy}{y^2+x}$$

(3) $f_{xx}(x,y)$

解答

$$f_{xx}(x,y)=\frac{1}{y^2+x}+\frac{y^2+x-x}{(y^2+x)^2}=\frac{2y^2+x}{(y^2+x)^2}$$

(4) $f_{xy}(x,y)$

解答

$$f_{xy}(x,y)=\frac{2y(y^2+x)-2xy}{(y^2+x)^2}=\frac{2y^3}{(y^2+x)^2}$$

(5) $f_{yy}(x,y)$

解答

$$f_{yy}(x,y)=\frac{2x(y^2+x)-4xy^2}{(y^2+x)^2}=\frac{2x^2-2xy^2}{(y^2+x)^2}$$

科目	数　学	分野	微分積分	３枚目／３枚中	受検番号		小計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1-y^2}dxdy$, D は x 軸と 2 直線 $x=1, y=x$ で囲まれた領域。

解答

D は不等式で表すと、$y \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ となる。

$$\iint_D \frac{x}{1-y^2}dxdy = \int_0^1 \left\{ \int_y^1 \frac{x}{1-y^2}dx \right\} dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2(1-y^2)} \right]_y^1 dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2(1-y^2)} - \frac{y^2}{2(1-y^2)}dy (ここまでで 5 点)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}dy = \left[\frac{1}{2}y \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}$$

(2) $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$, D は不等式 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} \leqq 1$ で表される領域。

解答

変数変換 $x = r\cos\theta, y = 2r\sin\theta$ をするとヤコビアンは $\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$、範囲は $0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ となる。

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 2r(r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta) \right\} d\theta (ここまでで 4 点)$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}r^4(\cos^2\theta + 4\sin^2\theta) \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)d\theta (ここまでで 7 点)$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta + 4\sin^2\theta)d\theta$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} + \pi \right)$$

$$= \frac{5}{2}\pi$$

令和２年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期)

科目	数　学	分野	線形代数	１枚目 ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

連立方程式

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -3y+2z=0 \\ kx-y+z=0 \end{cases}$$

がある。この方程式に $x=y=z=0$ 以外の解があるような定数 k を求めよ。(5 点)

またそのときの解を求めよ。(5 点)

解答

方程式の係数からなる行列式は $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ k & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3k+0+4k-(3k+0-2)=k-1$

となる。行列式が 0 のときに $x=y=z=0$ 以外の解があるから $k=1$ のときに $x=y=z=0$ 以外の解がある。

$k=1$ のとき、方程式の拡大係数行列は

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ となる。行基本変形にて変形すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、方程式は $x+2y-z=0$ と $-3y+2z=0$ となる。これより $y=\frac{2}{3}z$, $x=-2y+z=-\frac{4}{3}z+z=-\frac{1}{3}z$,

よって $t=3z$ とすると $\begin{cases} x=-t \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ が解となる。(t は任意の定数)

科目	数　学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

行列 $\begin{pmatrix} -\frac{9}{7} & \frac{15}{7} \\ \frac{10}{7} & \frac{16}{7} \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式は $\begin{vmatrix} -\frac{9}{7}-\lambda & \frac{15}{7} \\ \frac{10}{7} & \frac{16}{7}-\lambda \end{vmatrix} = (-\frac{9}{7}-\lambda)(\frac{16}{7}-\lambda) - \frac{15}{7}\cdot\frac{10}{7} = \lambda^2-\lambda-6 = (\lambda-3)(\lambda+2) = 0$

よって固有値は $\lambda = 3, -2$ (ここまで 5 点)

$\lambda = 3$ のとき $\begin{pmatrix} -\frac{30}{7} & \frac{15}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $-\frac{30}{7}x + \frac{15}{7}y = 0$ つまり $y = 2x$

よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = -2$ のとき $\begin{pmatrix} \frac{5}{7} & \frac{15}{7} \\ \frac{10}{7} & \frac{30}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $\frac{5}{7}x + \frac{15}{7}y = 0$ つまり、$x + 3y = 0$

よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

ただし c_1, c_2 は 0 以外の任意の実数。

固有値が両方とも正解で固有ベクトルの片方のみ正解のとき、8 点。固有値が片方のみ正解で対応する固有ベクトルが正解のとき 5 点。固有値が片方のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 0 点。固有値のみ正解で固有ベクトルが不正解のとき 5 点。

科目	数　学	分野	微分方程式	１枚目 ／ ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の微分方程式を解け。(5 点 ×2)

(1) $\frac{dx}{dt}\cos t + x\sin t = 1$

解答

斉次の微分方程式 $\frac{dx}{dt}\cos t + x\sin t = 0$ を解くと

$\frac{dx}{dt} = -x\tan t$

$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = -\tan t$

$\log|x| = \log|\cos t| + c_1$

$x = \pm e^{c_1}\cos t$ が斉次の解となる。(ここまで 3 点)

$x = u\cos t$ とすると、$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cos t - u\sin t$

これを微分方程式に代入すると、$\frac{du}{dt}\cos^2 t - u\sin t\cos t + u\sin t\cos t = 1$

$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t}$

$u = \tan t + c$

よって解は $x = u\cos t = \tan t\cos t + c\cos t = \sin t + c\cos t$ となる。

c_1, c_2, c は任意の定数。

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} - x = 6t - t^3$

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1) = 0$ よって特性解は $\lambda = 1, -1$。つまり、斉次の一般解は $x = c_1e^t + c_2e^{-t}$ となる。

特殊解を $x = at^3 + bt^2 + ct + d$ とすると $\frac{dx}{dt} = 3at^2 + 2bt + c,\ \frac{d^2x}{dt^2} = 6at + 2b$

これを方程式に代入すると $6at + 2b - at^3 - bt^2 - ct + d = -t^3 + 6t$

これより $\begin{cases} -a = -1 \\ -b = 0 \\ 6a - c = 6 \\ 2b + d = 0 \end{cases}$ この連立方程式を解くと

$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$

つまり特殊解は $x = t^3$

一般解は $x = c_1e^t + c_2e^{-t} + t^3$

斉次の一般解と特殊解の片方のみ求めているときは 3 点とする。

令和２年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

科目	数　学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

次の微分方程式の与えられた初期条件での解を求めよ。(5 点 $\times 2$)

(1) $t^2 x \frac{dx}{dt} = 1$ ($t = 1$ のとき $x = \sqrt{2}$)

解答

$x \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t^2}$

$\int x dx = \int \frac{1}{t^2} dt$

$\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{t} + c_1$ (ここまでで 3 点)

初期条件を代入すると $\frac{2}{2} = -1 + c_1$ よって $c_1 = 2$

特殊解は $x^2 = -\frac{2}{t} + 4$

$x = \sqrt{-\frac{2}{t} + 4}$ も正解とする。

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$ ($t = 0$ のときに $x = -2, \frac{dx}{dt} = -1$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ よって $\lambda = 2 \pm i$ となる。

一般解は $x = e^{2t}(c_1 \sin t + c_2 \cos t)$ となる。(ここまでで 3 点)

$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}(c_1 \sin t + c_2 \cos t) + e^{2t}(c_1 \cos t - c_2 \sin t) = e^{2t}\{(2c_1 - c_2)\sin t + (2c_2 + c_1)\cos t)\}$

初期条件を代入すると $\begin{cases} c_2 = -2 \\ 2c_2 + c_1 = -1 \end{cases}$

より $c_1 = 3, c_2 = -2$

特殊解は $x = e^{2t}(3\sin t - 2\cos t)$ となる。

科目	数　学	分野	応用数学	1枚中 1枚目	受検番号		小計		分野計	1枚目のみ

1 ベクトル場$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ，スカラー場 $r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ がある．
以下の解を示せ. 解答は最終的な形を示すのみでよい. ただし$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}(\partial/\partial x) + \boldsymbol{j}(\partial/\partial y) + \boldsymbol{k}(\partial/\partial z)$ である.
結果はベクトル値かスカラー値か識別可能な表記とすること.（10 点）

(1) $\boldsymbol{\nabla} r$　(2) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}$　(3) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{r}$　(4) $\boldsymbol{\nabla}(r^2)$　(5) $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} r)$

(1) $\boldsymbol{\nabla} r = \boldsymbol{\nabla}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$　(+2)　　$*\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ でも可

(2) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = 1+1+1 = 3$　(+2)

(3) $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\nabla}\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{0}$　(+2)

(4) $\boldsymbol{\nabla}(r^2) = 2r\boldsymbol{\nabla} r = 2r\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = 2\boldsymbol{r}$　(+2)　　$*\ 2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$ でも可

(5) 任意のスカラー場φに対して　$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{0}$ であるので $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} r) = \boldsymbol{0}$　(+2)

（別解　$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla} r) = \boldsymbol{\nabla}\times\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{\nabla}\dfrac{1}{r}\times\boldsymbol{r} + \dfrac{1}{r}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{r}) = \left(\dfrac{-1}{r^2}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ ）

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

2 図 1 に示す z=0 平面上の半径 2 の円弧経路 A→B に沿って，スカラー場 $\varphi = (x+y)^2$ についての

線積分 $\int_{A\to B}\varphi ds$ を求めよ．ただし s は弧長である．（10 点）

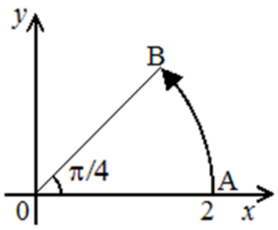

図 1

円弧経路 A→B は$\boldsymbol{r} = 2\cos t\,\boldsymbol{i} + 2\sin t\,\boldsymbol{j}$　$(0 \le t \le \pi/4)$
と表すことができる　(+2)

経路に沿って　$\varphi = (2\cos t + 2\sin t)^2 = 4 + 8\cos t\sin t$　(+2)

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = |-2\sin t\,\boldsymbol{i} + 2\cos t\,\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} = 2 \quad (+2)$$

よって$\int_{A\to B}\varphi ds = \int_{A\to B}\varphi\left|\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2(4 + 8\cos t\sin t)dt$　(+2)

$= 2\int_0^{\pi/4}(4 + 4\sin 2t)dt = 2[4t - 2\cos 2t]_0^{\pi/4} = 2(\pi + 2)$　(+2)