

|    |    |    |      |      |          |  |    |  |     |  |
|----|----|----|------|------|----------|--|----|--|-----|--|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分積分 | 1 枚目 | 受検<br>番号 |  | 小計 |  | 分野計 |  |
|    |    |    |      | 3 枚中 |          |  |    |  |     |  |

1

次の関数を微分せよ。(5 点 × 2 )

(1)  $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

解答

$$y' = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x^2+x}}$$

(2)  $y = \frac{1}{15} \cos x (3 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 8)$

解答

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{15} \sin x (3 \sin^4 x + 4 \sin^2 x + 8) + \frac{1}{15} \cos x (12 \sin^3 x \cos x + 8 \sin x \cos x) \\ &= \frac{1}{15} (-3 \sin^5 x - 4 \sin^3 x - 8 \sin x + 12 \sin^3 x \cos^2 x + 8 \sin x \cos^2 x) = -\sin^5 x \end{aligned}$$

式の変形が途中で終わっているときは 4 点

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1)  $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$

解答

$$e^x - 1 = t \text{ とすると } e^x dx = dt \text{ よって } \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log |e^x - 1| + C$$

積分定数がないときは 4 点

(2)  $\int_1^e x^4 \log x dx$

解答

$$\int_1^e x^4 \log x dx = \left[ \frac{1}{5} x^5 \log x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{5} x^5 \cdot \frac{1}{x} dx (\text{ここまで 2 点}) = \frac{1}{5} e^5 - \left[ \frac{1}{25} x^5 \right]_1^e = \frac{4}{25} e^5 + \frac{1}{25}$$

|    |    |    |      |
|----|----|----|------|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分積分 |
|----|----|----|------|

2 枚目

3 枚中

|          |  |
|----------|--|
| 受検<br>番号 |  |
|----------|--|

|        |  |
|--------|--|
| 小<br>計 |  |
|--------|--|

3

極限值  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1}$  を求めよ。(5 点)

解答

ロピタルの定理より、 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{2x} = \frac{e}{2}$

4

$f(x, y) = \tan^{-1} \frac{x - y}{x + y}$  を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1)  $f_x(x, y)$

解答

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - y}{x + y}\right)^2} \cdot \frac{x + y - (x - y)}{(x + y)^2} = \frac{2y}{(x + y)^2 + (x - y)^2} \text{ (ここまでで 2 点)}$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(2)  $f_y(x, y)$

解答

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - y}{x + y}\right)^2} \cdot \frac{-(x + y) - (x - y)}{(x + y)^2} = \frac{-2x}{(x + y)^2 + (x - y)^2} \text{ (ここまでで 2 点)}$$

$$= \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

(3)  $f_{xx}(x, y)$

解答

$$f_{xx}(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

(4)  $f_{xy}(x, y)$

解答

$$f_{xy}(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

(5)  $f_{yy}(x, y)$

解答

$$f_{yy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

|    |    |    |      |      |          |  |        |  |
|----|----|----|------|------|----------|--|--------|--|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分積分 | 3 枚目 | 受検<br>番号 |  | 小<br>計 |  |
|    |    |    |      | 3 枚中 |          |  |        |  |

## 5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1)  $\iint_D (x+y)dxdy$  ,  $D$  は曲線  $y = 1 - x^2$  と  $x$  軸に囲まれた領域

解答

範囲は  $0 \leq y \leq 1 - x^2, -1 \leq x \leq 1$  となる。よって  $\iint_D (x+y)dxdy = \int_{-1}^1 \left\{ \int_0^{1-x^2} (x+y)dy \right\} dx =$   
 $\int_{-1}^1 \left[ xy + \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x^2} dx = \int_{-1}^1 \left( x(1-x^2) + \frac{1}{2}(1-x^2)^2 \right) dx$  (ここまでに 5 点)  $= \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2}x^4 - x^3 - x^2 + x + \frac{1}{2} \right) dx =$   
 $\int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1)dx = \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{8}{15}$

(2)  $\iint_D \cos(x^2 + y^2)dxdy$ ,  $D$  は不等式  $x^2 + y^2 \leq 1$  を満たす領域

解答

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$  と変換すると、範囲は  $0 \leq r \leq 1, 1 \leq \theta \leq 2\pi$  となる。よって  $\iint_D \cos(x^2 + y^2)dxdy =$   
 $\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 r \cos r^2 dr \right\} d\theta$  (ここまでに 4 点)

さらに  $r^2 = t$  とすると、 $rdr = \frac{1}{2}dt$ , 範囲は  $0 \leq t \leq 1$  となる。よって  $\int_0^1 r \cos r^2 dr = \int_0^1 \frac{1}{2} \cos t dt = \frac{1}{2} [\sin t]_0^1 =$   
 $\frac{1}{2} \sin 1$  (ここまでに 7 点)

よって二重積分は  $\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin 1 d\theta = \frac{1}{2} \sin 1 [\theta]_0^{2\pi} = \pi \sin 1$  となる。

|    |    |    |      |      |          |  |        |  |             |  |
|----|----|----|------|------|----------|--|--------|--|-------------|--|
| 科目 | 数学 | 分野 | 線形代数 | 1 枚目 | 受検<br>番号 |  | 小<br>計 |  | 分<br>野<br>計 |  |
|    |    |    |      | 2 枚中 |          |  |        |  |             |  |

1

(1) 行列式  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$  を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - (-2) \cdot (-2) \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot (-2) = 2$$

(2) 行列  $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ (ここまでに 3 点)}$$

よって逆行列は  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{-3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

基本変形中の計算ミス一箇所するとき 3 点、二箇所以上ミスした時 0 点  
余因子を用いたときも計算ミス 1 回で 3 点、2 回以上 0 点

令和3年度 岐阜工業高等専門学校専攻科 学力検査による入学者選抜（前期，  
先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む）

|    |    |    |      |      |          |        |
|----|----|----|------|------|----------|--------|
| 科目 | 数学 | 分野 | 線形代数 | 2 枚目 | 受検<br>番号 | 小<br>計 |
|    |    |    |      | 2 枚中 |          |        |

2

行列  $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式は  $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$

よって固有値は  $\lambda = -3$  (ここまで 5 点)

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより  $x - y = 0$

よって固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$c$  は 0 以外の任意の定数。

|    |    |    |       |      |          |  |        |  |             |  |
|----|----|----|-------|------|----------|--|--------|--|-------------|--|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分方程式 | 1 枚目 | 受検<br>番号 |  | 小<br>計 |  | 分<br>野<br>計 |  |
|    |    |    |       | 2 枚中 |          |  |        |  |             |  |

1

次の微分方程式を解け。(5 点 × 2)

(1)  $\sin t \frac{dx}{dt} - x \cos t = \sin^2 t$

解答

斉次の微分方程式  $\sin t \frac{dx}{dt} - x \cos t = 0$  を解くと

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos t}{\sin t} dt$$

$$\log |x| = \log |\sin t| + c_1$$

$x = c_2 \sin t$  が解である。(ここまでに 2 点)

$x = u \sin t$  とすると、 $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \sin t + u \cos t$

これを微分方程式に代入すると、 $\frac{du}{dt} \sin^2 t + u \cos t \sin t - u \cos t \sin t = \sin^2 t$

$$\frac{du}{dt} = 1$$

$$u = t + c$$

よって解は  $x = u \sin t = (t + c) \sin t$  となる。

$c_1, c_2, c$  は任意の定数。

文字を書き間違えているときは 3 点。

(2)  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} = 6e^t$

解答

特性方程式は  $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2) = 0$  よって特性解は  $\lambda = 0, -2$ 。つまり、斉次の一般解は  $x = c_1 + c_2 e^{-2t}$  となる。

特殊解を  $x = ae^t$  とすると  $\frac{dx}{dt} = ae^t, \frac{d^2 x}{dt^2} = ae^t$

これを方程式に代入すると  $ae^t + 2ae^t = 6e^t$

これより  $a = 2$

つまり特殊解は  $x = 2e^t$

一般解は  $x = c_1 + c_2 e^{-2t} + 2e^t$

斉次の一般解と特殊解の片方のみ求めているときは 3 点とする。

斉次の一般解と特殊解を別に求めているが、それを足した一般解を求めているときは 4 点とする。

|    |    |    |       |      |          |        |
|----|----|----|-------|------|----------|--------|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分方程式 | 2 枚目 | 受検<br>番号 | 小<br>計 |
|    |    |    |       | 2 枚中 |          |        |

2

次の微分方程式の与えられた初期条件での解を求めよ。(5 点 × 2)

(1)  $(t^2 + 1) \frac{dx}{dt} = 2tx$  ( $t = 0$  のとき  $x = 1$ )

解答

変形して  $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{t^2 + 1}$  積分して  $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{2t}{t^2 + 1} dt$

$$\log |x| = \log |t^2 + 1|$$

$$\log |x| - \log |t^2 + 1| = 0$$

$$\log \left( x \frac{1}{t^2 + 1} \right) = c_1$$

$$x = c_2(t^2 + 1)$$

$c_1, c_2$  は任意の定数。(ここまでに 3 点)

初期条件を代入すると  $1 = c_2$

特殊解は  $x = t^2 + 1$

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0$  ( $t = 0$  のときに  $x = 0, \frac{dx}{dt} = 4\sqrt{2}$ )

解答

特性方程式は  $\lambda^2 - 2 = 0$  よって  $\lambda = \pm\sqrt{2}$

一般解は  $x = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$  となる。(ここまでに 3 点)

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

初期条件を代入すると

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

この連立方程式を解いて  $c_1 = 2, c_2 = -2$

特殊解は  $x = 2e^{\sqrt{2}t} - 2e^{-\sqrt{2}t}$  となる。

|    |    |    |      |
|----|----|----|------|
| 科目 | 数学 | 分野 | 応用数学 |
|----|----|----|------|

1 枚目

1 枚中

|          |  |
|----------|--|
| 受検<br>番号 |  |
|----------|--|

|        |  |
|--------|--|
| 小<br>計 |  |
|--------|--|

|             |        |
|-------------|--------|
| 分<br>野<br>計 | 1 枚目のみ |
|-------------|--------|

以下， $\nabla = i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + j\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + k\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$  を表すものとする．

① スカラー場  $\varphi = \sin xy + yz^2$  について，次のものを求めよ．（10 点）

(1) 勾配  $\text{grad}\varphi$

(2) 点  $P(2, \pi, 1)$  における勾配の値  $(\text{grad}\varphi)_P$

(3) 点  $P$  において  $\mathbf{u} = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$  方向への方向微分係数

(4) ラプラシアン  $\nabla^2\varphi$

(5)  $|(\text{grad}\varphi)_P|$

$$(1) \text{grad}\varphi = y \cos xy \mathbf{i} + (x \cos xy + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k} \quad (+2)$$

$$(2) (\text{grad}\varphi)_P = \pi \cos 2\pi \mathbf{i} + (2 \cos 2\pi + 1)\mathbf{j} + 2\pi\mathbf{k} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\pi\mathbf{k} \quad (+2)$$

$$(3) \frac{d\varphi}{du} = \mathbf{u} \cdot (\text{grad}\varphi)_P = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (\pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\pi\mathbf{k}) = 2 \quad (+2)$$

$$(4) \nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = -y^2 \sin xy - x^2 \sin xy + 2y \quad (+2)$$

$$(5) |(\text{grad}\varphi)_P| = \sqrt{\pi^2 + 3^2 + (2\pi)^2} = \sqrt{5\pi^2 + 9} \quad (+2)$$

② ベクトル場  $\mathbf{A} = xz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + y \sin z \mathbf{k}$  がある．経路  $C: \mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq \pi)$  としたとき，

$$\int_C (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r}$$

を求めよ．（10 点）

$$\nabla \times \mathbf{A} = \sin z \mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k} \quad (+2)$$

$$\text{経路 } C \text{ に沿って } \nabla \times \mathbf{A} = \sin t \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k} \quad (+2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (+2)$$

$$\int_C (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{r} = \int_C (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) dt = \int_0^\pi (\sin t \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt$$

$$= \int_0^\pi (2 \sin t + 2te^t + e^t) dt \quad (+2)$$

$$= [-2 \cos t + e^t + 2te^t]_0^\pi - \int_0^\pi 2e^t dt = 4 + (e^\pi - 1) + 2\pi e^\pi - 2(e^\pi - 1) = (2\pi - 1)e^\pi + 5$$

(+2)