数学合計

科目	数学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 ×2)

(1) $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

解答

$$y' = \frac{-\cos x + \sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$$

(2) $y = \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

解答

$$y' = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot (-x^{-2}) = -\frac{1}{x^2 + x}$$

2

次の積分をせよ。(5 点 × 2)

(1) $\displaystyle\int x^2 e^{x^3} dx$

解答

$x^3 = t$ とすると $3x^2 dx = dt$ よって $\displaystyle\int x^2 e^{x^3} dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

積分定数がないときは 4 点

(2) $\displaystyle\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)dx$

解答

$$\int_0^2 (x^3 - 4x^2 + 4x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{4}{3}$$

科目	数学	分野	微分積分	２枚目 / ３枚中	受検番号		小計	

3

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$ をもとめよ。(5 点)

解答

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(x-\frac{\pi}{2})\tan x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{\cos x}$$

ロピタルの定理より、$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-(x-\frac{\pi}{2})\cos x}{-\sin x}=-1$

4

$f(x,y)=\sqrt{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}$ を偏微分して 次の偏導関数を求めよ。(3 点 × 5)

(1) $f_x(x,y)$

解答

$f_x(x,y)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}(-x^{-2})=-\dfrac{1}{2}x^{-2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}$

(2) $f_y(x,y)$

解答

$f_y(x,y)=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}(-y^{-2})=-\dfrac{1}{2}y^{-2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}$

(3) $f_{xx}(x,y)$

解答

$f_{xx}(x,y)=x^{-3}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{4}x^{-2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{3}{2}}(-x^{-2})=x^{-3}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{4}x^{-4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{3}{2}}$

(4) $f_{xy}(x,y)$

解答

$f_{xy}(x,y)=\dfrac{1}{4}x^{-2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{3}{2}}(-y^{-2})=-\dfrac{1}{4}x^{-2}y^{-2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{3}{2}}$

(5) $f_{yy}(x,y)$

解答

$f_{yy}(x,y)=y^{-3}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{4}y^{-2}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{3}{2}}(-y^{-2})=y^{-3}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{4}y^{-4}(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y})^{-\frac{3}{2}}$

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D \sin(2x-y)dxdy$, D は直線 $x+y=\frac{\pi}{2}$ と x 軸,y 軸に囲まれた領域

解答

範囲は $0 \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}-x, 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ となる。よって $\displaystyle\iint_D \sin(2x-y)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(2x-y)dy \right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2x-y)]_0^{\frac{\pi}{2}-x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(3x-\frac{\pi}{2}) - \cos 2x \right) dx$(ここまでで 5 点) $= \displaystyle\left[\frac{1}{3}\sin(3x-\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$

(2)$\displaystyle\iint_D (x^3+y^3)dxdy$, D は不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ を満たす領域

解答

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と変換すると、範囲は $0 \leqq r \leqq 1, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ となる。よって $\displaystyle\iint_D (x^3+y^3)dxdy =$
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^1 r^4(\cos^3\theta + \sin^3\theta)dr \right\} d\theta$(ここまでで 4 点)
$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{5}r^5 \right]_0^1 (\cos^3\theta + \sin^3\theta)d\theta = \frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3\theta + \sin^3\theta)d\theta$(ここまでで 7 点)
$\displaystyle= \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{4}{15}$

科目	数学	分野	線形代数	１枚目／２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & 10 & k \\ 10 & 5 & -3 \\ -5 & 15 & 5 \end{vmatrix}$ を求めよ。(5 点)

解答

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & k \\ 10 & 5 & -3 \\ -5 & 15 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot5\cdot5+10\cdot(-3)\cdot(-5)+10\cdot15\cdot k-(-5)\cdot5\cdot k-10\cdot10\cdot5-5\cdot15\cdot(-3)=175k$$

(2) 連立方程式 $\begin{cases} 5x+10y=0 \\ 10x+5y-3z=0 \\ -5x+15y+5z=0 \end{cases}$ の解を求めよ。(5 点)

解答

拡大係数行列を行基本変形する。

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & -3 & 0 \\ -5 & 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -3 & 0 \\ 0 & 25 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

これにより $x+2y=0, 5y+z=0$ となるから t を任意の定数として $x=-2t, y=t, z=-5t$ が解となる。

基本変形中の計算ミス一箇所のとき 3 点、二箇所以上ミスした時 0 点

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ で表される一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有方程式は $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda-1)(\lambda-5) = 0$

よって固有値は $\lambda = 1, 5$ (ここまで 5 点)

$\lambda = 1$ のとき

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $-2x + 4y = 0$

よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 5$ のとき

$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

これより $-4x = 0$

よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c_1, c_2 は 0 以外の任意の定数。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目 ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の微分方程式を解け。(5 点 ×2)

(1) $\dfrac{dx}{dt} = x\cos t$

解答

$\dfrac{1}{x}\dfrac{dx}{dt} = \cos t$ を積分して

$\int \frac{1}{x}dx = \int \cos t dt$

$\log|x| = \sin t + c_1$

$x = \pm e^{\sin t}e^{c_1}$

ここで $\pm e^{c_1} = c$ とすると

$x = ce^{\sin t}$

c_1, c は任意の定数。

(2) $4\dfrac{d^2x}{dt^2} - 8\dfrac{dx}{dt} + 3x = 0$

解答

特性方程式は $4\lambda^2 - 8\lambda + 3 = (2\lambda - 3)(2\lambda - 1) = 0$ よって特性解は $\lambda = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$, 一般解は $x = c_1e^{\frac{3}{2}t} + c_2e^{\frac{1}{2}t}$ となる。

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受検番号		小計	

2

次の微分方程式の与えられた初期条件での解を求めよ。(5 点 $\times 2$)

(1) $\dfrac{dx}{dt} + x = t^2 + 2t$ ($t = 0$ のとき $x = 1$)

解答

斉次の微分方程式は $\frac{dx}{dt} + x = 0$

これを解くと $\frac{dx}{dt} = -x, \int \frac{1}{x} dx = -\int 1 dt$

$\log |x| = -t + c_1, x = \pm e^{-t} e^{c_1}$

$x = ue^{-t}$ として元の方程式に代入する。

$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} e^{-t} - ue^{-t}$ より $\frac{du}{dt} e^{-t} - ue^{-t} + ue^{-t} = \frac{du}{dt} e^{-t} = t^2 + 2t$

$\frac{du}{dt} = e^t (t^2 + 2t)$

$u = \int e^t (t^2 + 2t) dt = e^t (t^2 + 2t) - \int e^t (2t + 2) dt = e^t (t^2 + 2t) - (e^t (2t + 2) - \int e^t \cdot 2dt)$

$= e^t (t^2 + 2t) - e^t (2t + 2) + 2e^t + c_2 = e^t t^2 + c_2$

これを代入して

$x = (e^t t^2 + c_2) e^{-t} = t^2 + c_2 e^{-t}$ が一般解 (ここまでで 3 点)

初期条件を代入すると $1 = c_2$

特殊解は $x = t^2 + e^{-t}$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 6e^{-t}$ ($t = 0$ のときに $x = 1, \dfrac{dx}{dt} = -2$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$ で $\lambda = 1, 2$

斉次の一般解は $x = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ となる。(ここまでで 2 点)

特殊解を $x = ae^{-t}$ として元の微分方程式に代入すると

$ae^{-t} + 3ae^{-t} + 2ae^{-t} = 6e^{-t}$ これより $a = 1$

一般解は $x = e^{-t} + c_1 e^t + c_2 e^{2t}$

$\frac{dx}{dt} = -e^{-t} + c_1 e^t + 2c_2 e^{2t}$

初期条件を代入すると

$$\begin{cases} 1 + c_1 + c_2 = 1 \\ -1 + c_1 + 2c_2 = -2 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $c_1 = 1, c_2 = -1$

特殊解は $x = e^{-t} + e^t - e^{2t}$ となる。

科目	数学	分野	応用数学	１枚目／１枚中	受検番号		小計		分野計	１枚目のみ

以下，$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ を表すものとする．

$\boxed{1}$スカラー場$\varphi = e^{xy} - \log(y + 2z)$ について，次のものを求めよ．(10 点)

(1) 勾配 gradφ

(2) 点 P(0,1,2)における勾配の値$(\mathrm{grad}\varphi)_P$

(3) 点 P において$\boldsymbol{u} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$方向への方向微分係数

(4) ラプラシアン $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi$

(5) $(\mathrm{grad}\varphi)_P$と同じ方向の単位ベクトル$\boldsymbol{a}$

(1) $\mathrm{grad}\varphi = ye^{xy}\boldsymbol{i} + \left(xe^{xy} - \frac{1}{y+2z}\right)\boldsymbol{j} - \frac{2}{y+2z}\boldsymbol{k}$ (+2)

(2) $(\mathrm{grad}\varphi)_P = 1e^0\boldsymbol{i} + \left(0 - \frac{1}{1+4}\right)\boldsymbol{j} - \frac{2}{1+4}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} - \frac{1}{5}\boldsymbol{j} - \frac{2}{5}\boldsymbol{k}$ (+2)

(3) $\frac{d\varphi}{du} = \boldsymbol{u} \cdot (\mathrm{grad}\varphi)_P = \frac{1}{3}(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}) \cdot \left(\boldsymbol{i} - \frac{1}{5}\boldsymbol{j} - \frac{2}{5}\boldsymbol{k}\right) = \frac{1}{5}$ (+2)

(4) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\varphi = y^2e^{xy} + \left(x^2e^{xy} + \frac{1}{(y+2z)^2}\right) + \frac{4}{(y+2z)^2} = (x^2 + y^2)e^{xy} + \frac{5}{(y+2z)^2}$ (+2)

(5) $\boldsymbol{a} = \frac{(\mathrm{grad}\varphi)_P}{|(\mathrm{grad}\varphi)_P|} = \frac{5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}}{\sqrt{5^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{30}}(5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k})$ (+2)

$\boxed{2}$ベクトル場$\boldsymbol{A} = \log(x + y + z)\,\boldsymbol{i} - xy^2\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$ がある．経路 C が始点P(1,1,0)，終点Q(−1,3,1)であるような線分であるとき，$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$の経路 C に沿っての線積分

$$\int_C (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})\, ds$$

を求めよ．ただしここでsは弧長とする．(10 点)

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{x+y+z} - 2xy + xy = \frac{1}{x+y+z} - xy$ (+2)

経路 C は$\boldsymbol{r} = (1 - 2t)\boldsymbol{i} + (1 + 2t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$　$(0 \leq \mathrm{t} \leq 1)$ (+2)

経路 C に沿って　$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{2+t} - (1 - 4t^2)$ (+2)

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ (+1)　$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ (+1)

$$\int_C (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A})\, ds = \int_C (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$

$$= \int_0^1 \left\{\frac{1}{2+t} - (1 - 4t^2)\right\} \cdot 3dt = 3\left[\log|2 + t| + \frac{4}{3}t^3 - t\right]_0^1 = 3(\log 3 - \log 2) + 1$$

(+2)