令和４年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜 (後期)

数学合計

科目	数　学	分野	微分積分	１枚目 / ３枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の関数を微分せよ。(5 点 ×2)

(1) $f(x) = \tan^{-1}(e^x)$

解答

$$f'(x) = \frac{1}{1+(e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

(2) $f(x) = \sqrt{5 - x^4}$

解答

$$f'(x) = \frac{1}{2}(5 - x^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4x^3) = -\frac{2x^3}{\sqrt{5-x^4}}$$

2

次の積分をせよ。(5 点 ×2)

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3+1} dx$

解答

$t = x^3 + 1$ とすると、$dt = 3x^2 dx$, つまり $x^2 dx = \frac{1}{3} dt$ よって

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx = \int \frac{1}{3t} dt = \frac{1}{3} \log|t| + C = \frac{1}{3} \log|x^3+1| + C$$

積分定数がないときは 4 点

(2) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{2}x - 3\right) dx$

解答

$$\int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{2}x - 3\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^2 - 3x\right]_1^2 = 4 + 1 - 6 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 3\right) = \frac{3}{2}$$

科目	数　学	分野	微分積分	２枚目 ３枚中	受検番号		小計	

3

極限値 $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 - 4\sin^2 x}}$ を求めよ。(5 点)

解答

ロピタルの定理より $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1 - 4\sin^2 x}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{-\sin x}{\frac{-4\sin x \cos x}{\sqrt{1-4\sin^2 x}}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{1 - 4\sin^2 x}}{4\cos x} = 0$

4

関数 $f(x, y) = \sin(x \sin y)$ を偏微分して以下の偏導関数を求めよ。(3 点 $\times 5$)

(1) $f_x(x, y)$

解答

$f_x(x, y) = \sin y \cos(x \sin y)$

(2) $f_y(x, y)$

解答

$f_y(x, y) = x \cos y \cos(x \sin y)$

(3) $f_{xx}(x, y)$

解答

$f_{xx}(x, y) = -\sin^2 y \sin(x \sin y)$

(4) $f_{xy}(x, y)$

解答

$f_{xy}(x, y) = \cos y \cos(x \sin y) - x \sin y \cos y \sin(x \sin y)$

(5) $f_{yy}(x, y)$

解答

$f_{yy}(x, y) = -x \sin y \cos(x \sin y) - x^2 \cos^2 y \sin(x \sin y)$

科目	数　学	分野	微分積分	３枚目 / ３枚中	受検番号		小計	

5

次の重積分を求めよ。(10 点 ×2)

(1) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}dxdy$ D は x 軸と直線 $y=x,\ x=1$ で囲まれた領域。

解答

範囲は $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x$ よって積分は

$\displaystyle\int_0^1 \left\{ \int_0^x e^{x+y}dy \right\} dx = \int_0^1 \left[e^{x+y} \right]_0^x dx = \int_0^1 (e^{2x}-e^x)dx$(ここまで 5 点)

$\displaystyle= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x \right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x+y)dxdy$ D は $y \geqq 0$, $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たす領域。

解答

極座標にすると範囲は $0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi$ となる。

$\displaystyle\int_0^\pi \left\{ \int_0^1 r^2(\cos\theta + \sin\theta)dr \right\} d\theta = \int_0^\pi (\cos\theta + \sin\theta) \left[\frac{1}{3}r^3 \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{3}\int_0^\pi (\cos\theta + \sin\theta)d\theta$

(ここまでで 5 点)

$\displaystyle= \frac{1}{3}\left[\sin\theta - \cos\theta \right]_0^\pi = \frac{2}{3}$

科目	数　学	分野	線形代数	１枚目 ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

について次のものを求めよ。(5 点 ×2)

(1) 行列式 $|A|$

解答

$|A| = 1\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot 0\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)\cdot 1 - ((-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1) = 1$

(2) 逆行列 A^{-1}

解答

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

よって逆行列は

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

余因子により逆行列を求めたとき、(1) の行列式を間違えたために正解とならないときは 3 点。

科目	数　学	分野	線形代数	２枚目 ／ ２枚中	受検番号		小計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ で表される線形変換の固有値と固有ベクトルを求めよ。(10 点)

解答

固有値 λ は
$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 81 = \lambda^2 - 10\lambda - 56 = (\lambda - 14)(\lambda + 4) = 0$
$\lambda = 14, -4$ となる。
$\lambda = 14$ のとき、
$\begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
より $x = y$ よって固有ベクトルは $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\lambda = -4$ のとき、
$\begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
より $x = -y$ よって固有ベクトルは $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
c_1, c_2 は 0 以外の任意の定数。

固有値のみ正解のとき 5 点、固有値が正解で固有ベクトルが片方のみ正解のとき 8 点、固有値が片方正解で対応する固有ベクトルが正解のとき 5 点、固有値が片方正解で固有ベクトルが間違っているとき 0 点

科目	数　学	分野	微分方程式	１枚目 / ２枚中	受検番号		小計		分野計	

1

次の微分方程式の一般解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $x\cos t - \frac{dx}{dt}\sin t = 1$

解答

斉次方程式は $x\cos t = \frac{dx}{dt}\sin t$

これより $\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin t}$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{\cos t}{\sin t}dt$$

$\log|x| = \log|\sin t| + c_1$

$x = \pm e^{c_1}\sin t$(ここまで 2 点)

$x = u\sin t$ とする。$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\sin t + u\cos t$

方程式に代入すると

$u\sin t\cos t - \frac{du}{dt}\sin^2 t - u\sin t\cos t = 1$

$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\sin^2 t}$

$u = \cot t + c$

よって $x = (\cot t + c)\sin t = \left(\frac{\cos t}{\sin t} + c\right)\sin t = \cos t + c\sin t$

c_1, c は任意の定数。

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = -4\sin t - 2\cos t$

解答

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1) = 0$ より $\lambda = 1, -2$ よって斉次の一般解は $x = c_1e^t + c_2e^{-2t}$

特殊解を $x = a\sin t + b\cos t$ とすると

$\frac{dx}{dt} = a\cos t - b\sin t$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\sin t - b\cos t$

これを代入して

$-a\sin t - b\cos t + a\cos t - b\sin t - 2(a\sin t + b\cos t) = -4\sin t - 2\cos t$

$\sin t$ と $\cos t$ の係数から

$$\begin{cases} -3a - b = -4 \\ a - 3b = -2 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて $a = b = 1$

よって一般解は

$x = c_1e^t + c_2e^{-2t} + \sin t + \cos t$

c_1, c_2 は任意の定数。

斉次の一般解のみ正解 2 点、特殊解のみ正解 2 点

令和４年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜（後期）

科目	数　学	分野	微分方程式	２枚目 ／ ２枚中	受検番号		小計	

2

次の微分方程式の与えらえた初期条件での解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $x\frac{dx}{dt} - \frac{1}{x} = \frac{t}{x}$ ($t = 1$ のとき $x = 2$)

解答

方程式を変形すると $x^2\frac{dx}{dt} = t + 1$

よって $\displaystyle\int x^2 dx = \int (t+1)dt$

$\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}t^2 + t + c$($c$ は任意の定数) (ここまで 3 点)

$t = 1, x = 2$ を代入すると、$\frac{8}{3} = \frac{3}{2} + c$

$c = \frac{7}{6}$

よって $\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{2}t^2 + t + \frac{7}{6}$

$x^3 = \frac{3}{2}t^2 + 3t + \frac{7}{2}$

(2) $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0$ ($t = 0$ のとき $x = 1$, $\frac{dx}{dt} = 0$)

解答

特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$

よって $\lambda = -1$(重解) 一般解は $x = (c_1 + tc_2)e^{-t}$(c_1, c_2 は任意の定数) (ここまで 3 点)

$\frac{dx}{dt} = (c_1 - c_2 - c_1 t)e^{-t}$

初期条件を代入すると

$$\begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases}$$

この解は $c_1 = c_2 = 1$

よって $x = (1+t)e^{-t}$

科目	数　学	分野	応用数学	１枚目 / １枚中	受検番号		小計		分野計	１枚目のみ

以下，$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ を表すものとする．

$\boxed{1}$スカラー場$\varphi = xe^{yz}$, ベクトル場$\boldsymbol{A} = -y(x^2+y^2)\boldsymbol{i} + x(x^2+y^2)\boldsymbol{j} + xyz\boldsymbol{k}$について，次のものを求めよ．(10 点)

(1) 勾配 grad φ

(2) 発散 div $\boldsymbol{A}$

(3) 回転 rot $\boldsymbol{A}$

(4) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi$

(5) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A})$

(1) grad $\varphi = e^{yz}\boldsymbol{i} + xze^{yz}\boldsymbol{j} + xye^{yz}\boldsymbol{k}$ (+2)

(2) div $\boldsymbol{A} = -2xy + 2xy + xy = xy$ (+2)

(3) rot $\boldsymbol{A} = xz\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + (3x^2+y^2+x^2+3y^2)\boldsymbol{k} = xz\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + 4(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$ (+2)

(4) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = xz^2e^{yz} + xy^2e^{yz} = x(y^2+z^2)e^{yz}$ (+2)

(5) $\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = (8y+y)\boldsymbol{i} - (8x-x)\boldsymbol{j} = 9y\boldsymbol{i} - 7x\boldsymbol{j}$ (+2)

$\boxed{2}$ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$　$(0 \le t \le 1)$ で表される経路 C がある．
スカラー場$\varphi = xyz$ の経路 C に沿っての線積分

$$\int_C \varphi\, ds$$

を求めよ．　(10 点)

経路 C に沿って$\varphi = 1\cdot 2t\cdot t^2 = 2t^3$ (+2)

$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 2\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$　　$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = 2\sqrt{1+t^2}$ (+2)

$$\int_C \varphi\, ds = \int_0^1 \varphi\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt = \int_0^1 4t^3\sqrt{1+t^2}dt \quad (+2)$$

$\sqrt{1+t^2} = u$と置くと$1+t^2 = u^2$　$2tdt = 2udu$　$tdt = udu$　$t: 0 \to 1$で$u: 1 \to \sqrt{2}$

$$\int_0^1 4t^3\sqrt{1+t^2}dt = 4\int_1^{\sqrt{2}}(u^2-1)\,u\cdot udu = 4\int_1^{\sqrt{2}}(u^4-u^2)\,du \quad (+2)$$

$$= 4\left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} = 4\left\{\left(\frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right\} = \frac{8}{15}\left(1+\sqrt{2}\right) \quad (+2)$$

（別解：$t = \tan\theta, \cos\theta = x$と置換し $4\int_{1/\sqrt{2}}^{1}(x^{-6} - x^{-4})dx$として解いても可(ここまでで+2)）