令和５年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜
（前期，先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む）

数学合計

科目	数学	分野	微分積分

１枚目／３枚中

受験番号		小計		分野計	

1

関数 $y = \dfrac{\log x}{e^x - 1}$ を微分せよ (5 点)

解答

$y' = \dfrac{\frac{1}{x}(e^x - 1) - \log x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \dfrac{e^x - xe^x \log x - 1}{x(e^x - 1)^2}$

2

次の積分を計算せよ。(5 点 ×2)

(1) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$

解答

$\sin x = t$ とすると、$\cos x dx = dt$

よって $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{1 + t} dt = \log|1 + t| + C = \log(1 + \sin x) + C$

積分定数がないときは 4 点

(2) $\displaystyle\int_2^4 (x^3 - 8x^2 + 20x - 16) dx$

解答

$\displaystyle\int_2^4 (x^3 - 8x^2 + 20x - 16) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 10x^2 - 16x\right]_2^4$

$= 64 - \dfrac{512}{3} + 160 - 64 - (4 - \dfrac{64}{3} + 40 - 32) = -\dfrac{4}{3}$

3

極限値 $\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$ を求めよ。(5 点)

解答

$\frac{1}{x} = t$ とすると、$x \to \infty$ のときに $t \to 0$ よって

$\displaystyle\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

科目	数学	分野	微分積分	２枚目／３枚中	受験番号		小計	

4

関数 $f(x,y)=\sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{y-\dfrac{1}{x}}$ を偏微分して f_x, f_y を求めよ。(5 点 ×2)

解答

$$f_x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{2\sqrt{x+\frac{1}{y}}}+\frac{1}{2x^2\sqrt{y-\frac{1}{x}}}$$

$$f_y=-\frac{1}{2y^2}\left(x+\frac{1}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2y^2\sqrt{x+\frac{1}{y}}}+\frac{1}{2\sqrt{y-\frac{1}{x}}}$$

5

不等式 $1\leqq x\leqq 2, 0\leqq y\leqq 1$ で表される領域を D とする。$\displaystyle\iint_D e^y\log x dxdy$ を求めよ。(10 点)

解答

$$\iint_D e^y\log x dxdy=\int_0^1\left\{\int_1^2 e^y\log x dx\right\}dy=\int_0^1 e^y\left\{[x\log x]_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx\right\}dy$$
$$=\int_0^1 e^y\left\{2\log 2-[x]_1^2\right\}dy$$
$$=\int_0^1 e^y(2\log 2-1)dy$$
$$=[e^y]_0^1(2\log 2-1)$$
$$=(e-1)(2\log 2-1)$$

6

$x>0, y>0$ の条件のもとで２直線 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$ と２曲線 $xy=1$, $xy=2$ で囲まれた領域を D とする。

(1) $x=\sqrt{\dfrac{v}{u}}, y=\sqrt{uv}$ によって変数変換する。この時のヤコビアン J を求めよ。(10 点)

解答

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}u^{-1}-\frac{1}{4}u^{-1}=-\frac{1}{2u}$$

$J=\dfrac{1}{2u}$ も正解。

(2) 重積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ を求めよ (10 点)

解答

(1) のように変数変換をすると、$u=\dfrac{y}{x}, v=xy$ 範囲は $1 \leqq v \leqq 2, \frac{1}{2} \leqq u \leqq 2$ となるので、

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\left\{\int_1^2 \left(\frac{v}{u}+uv\right)\frac{1}{2u}dv\right\}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\left[\frac{1}{2}v^2\right]_1^2 du$$

$$=\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)du$$

$$=\frac{3}{4}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}+2+2-\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{4}$$

科目	数学	分野	線形代数	１枚目／２枚中	受験番号		小計		分野計	

1

(1) 連立方程式 $\begin{cases} 7x + y - 3z = 0 \\ kx + 11y - 7z = 0 \\ -7x + 4y + z = 0 \end{cases}$ に $x = y = z = 0$ 以外の解が存在するような k の値を求めよ。(5 点)

解答

行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 1 & -3 \\ k & 11 & -7 \\ -7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ となるときだから、

$\begin{vmatrix} 7 & 1 & -3 \\ k & 11 & -7 \\ -7 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 77 - 12k + 49 - 231 - k + 196 = 91 - 13k = 0$ だから $k = 7$ のときである。

(2) そのときの解を求めよ。(5 点)

解答

拡大係数行列は $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 0 \\ 7 & 11 & -7 & 0 \\ -7 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

これより $7x + y - 3z = 0,\ 5y - 2z = 0$ を満たせばよいことがわかる。$z = t$ とすると $y = \dfrac{2}{5}t, x = \dfrac{13}{35}t$ となる。

よって解は t を任意の定数として $x = \dfrac{13}{35}t, y = \dfrac{2}{5}t, z = t$ である。

$x = y = z = 0$ について含めていても、除いていてもどちらでも正解とする。

科目	数学	分野	線形代数	２枚目 / ２枚中	受験番号		小計	

2

行列 $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 16 & 19 \end{pmatrix}$ が表す一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ (10 点)

解答

固有方程式は $\lambda^2 - 24\lambda + 143 = 0$

$(\lambda - 11)(\lambda - 13) = 0$

よって $\lambda = 11, 13$

よって固有値は $11, 13$(ここまでで 5 点)

$\lambda = 11$ のとき固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、$-6x - 3y = 0$ よって c_1 を任意の定数として固有ベクトルは $c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 13$ のときき固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -8 & -3 \\ 16 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、$-8x - 3y = 0$ よって c_2 を任意の定数として固有ベクトルは $c_2\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

固有ベクトルが片方のみ正解のときは 8 点

本来 c_1, c_2 は 0 以外の定数であるが、その表記がなくても正解とする。

科目	数学	分野	微分方程式	１枚目／２枚中	受験番号		小計		分野計	

1

次の微分方程式の解をもとめよ。(5 点 ×2)

(1) $\dfrac{dx}{dt}\cos t + x\sin t = \sin^2 t$

解答
斉次微分方程式は $\dfrac{dx}{dt}\cos t = -x\sin t$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{\sin t}{\cos t}dt$
$\log|x| = \log|\cos t| + c_1$
$x = \pm e^{c_1}\cos t$(ここまで 2 点)
$x = u\cos t$ とすると、$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}\cos t - u\sin t$ これを微分方程式に代入して
$\frac{du}{dt}\cos^2 t - u\sin t\cos t + u\sin t\cos t = \sin^2 t$
$\dfrac{du}{dt} = \dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \dfrac{1}{\cos^2 t} - 1$
$u = \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 t} - 1dt = \tan t - t + c$
$x = (\tan t - t + c)\cos t = \sin t - t\cos t + c\cos t$
c, c_1 は任意の定数。
(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 10\dfrac{dx}{dt} + 25x = 30\sin t + 72\cos t$

解答
特性方程式は $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 = 0$ よって $\lambda = 5$ 重解
斉次の一般解は $x = (c_1 + c_2 t)e^{5t}$, c_1, c_2 は任意の定数。(ここまでで 2 点)
特殊解を $x = a\sin t + b\cos t$ とすると, $\frac{dx}{dt} = a\cos t - b\sin t$, $\frac{d^2x}{dt^2} = -a\sin t - b\cos t$ これらを微分方程式に代入すると、
$-a\sin t - b\cos t - 10a\cos t + 10b\sin t + 25a\sin t + 25b\cos t = 30\sin t + 72\cos t$
$(10b + 24a)\sin t + (-10a + 24b)\cos t = 30\sin t + 72\cos t$
連立方程式
$$\begin{cases} 10b + 24a = 30 \\ -10a + 24b = 72 \end{cases}$$
を解くと、$a = 0, b = 3$ となる。
特殊解は $x = 3\cos t$ となる。(特殊解のみ正解の場合は 2 点)
非斉次の一般解は $x = 3\cos t + (c_1 + c_2 t)e^{5t}$ である。

科目	数学	分野	微分方程式	２枚目 / ２枚中	受験番号		小計	

2

与えられた条件で次の微分方程式の特殊解を求めよ。(5 点 ×2)

(1) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{x+1}$, $(t = 0$ のとき $x = -1)$

解答
$\int (x+1)dx = \int t dt$
$\frac{x^2}{2} + x = \frac{t^2}{2} + c_1$
(ここまで 3 点)
ここで初期条件を代入すると $\frac{1}{2} - 1 = c_1$ よって $c_1 = -\frac{1}{2}$
特殊解は $\frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}$
2 倍にして $x^2 + 2x = t^2 - 1$
(2)
$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$, $(t = 0$ のとき $x = 3$, $\frac{dx}{dt} = -3)$

解答
特性方程式は $\lambda^2 + 3 = 0$ で特性解は $\lambda = \pm\sqrt{3}i$ となる。
よって一般解は $x = c_1 \cos\sqrt{3}t + c_2 \sin\sqrt{3}t)$ となる。(ここまでで 3 点)

$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{3}c_1 \sin\sqrt{3}t + \sqrt{3}c_2 \cos\sqrt{3}t$
初期条件を代入すると
$\begin{cases} 3 = c_1 \\ -3 = \sqrt{3}c_2 \end{cases}$
となるので $c_1 = 3,\ c_2 = -\sqrt{3}$
よって $x = 3\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t$

令和５年度　岐阜工業高等専門学校専攻科　学力検査による入学者選抜
（前期，先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む）

科目	**数学**	分野	応用数学	1枚目／1枚中	受験番号		小計		分野計	1枚目のみ

以下，$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ を表すものとする．

$\boxed{1}$スカラー場$\varphi = ax^2 + bxyz + cz^2$　$(a, b, c;$ 定数$)$ について，次のものを求めよ．
ただし(4)(5)の条件は独立である．　(10 点)

(1) grad φ

(2) div $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)$

(3) rot $(\boldsymbol{\nabla}\varphi)$

(4) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi = 0$ となる場合に係数a, b, cが満たすべき条件

(5) 点 P(1,0,1)における$\boldsymbol{\nabla}\varphi$と点 Q(0,1,1)における$\boldsymbol{\nabla}\varphi$とが直交する場合に係数$a, b, c$が満たすべき条件

(1) grad $\varphi = \frac{\partial(ax^2+bxyz+cz^2)}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(ax^2+bxyz+cz^2)}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(ax^2+bxyz+cz^2)}{\partial z}\boldsymbol{k} = (2ax + byz)\boldsymbol{i} + (bxz)\boldsymbol{j} + (bxy + 2cz)\boldsymbol{k}$

(+2)

(2) div $(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = 2a + 2c$　(+2)

(3) rot $(\boldsymbol{\nabla}\varphi) = \boldsymbol{0}$　(+2)

(4) $\boldsymbol{\nabla}^2\varphi = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi = 2a + 2c = 0$　　$\underline{a + c = 0}$　(+2)

(5) $\boldsymbol{\nabla}\varphi(1,0,1) = 2a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + 2c\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{\nabla}\varphi(0,1,1) = b\boldsymbol{i} + 2c\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{\nabla}\varphi(1,0,1)\cdot\ \boldsymbol{\nabla}\varphi(0,1,1) = (2a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + 2c\boldsymbol{k})\cdot(b\boldsymbol{i} + 2c\boldsymbol{k}) = 2ab + 4c^2 = 0$　　$\underline{ab + 2c^2 = 0}$　(+2)

$\boxed{2}$経路 C は始点 P(1,1,3)，終点 Q(2,3,7)とを直線的に結ぶ経路である．線積分

$$\int_C \left(\frac{1}{xy} + \frac{z}{xy}\right) ds$$

を求めよ．ただし s は弧長である．　(10 点)

経路 C は$\boldsymbol{r} = (1 + t)\boldsymbol{i} + (1 + 2t)\boldsymbol{j} + (3 + 4t)\boldsymbol{k}$　$(0 \leq t \leq 1)$　と表せる．　(+1)

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k},\quad \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{21} \qquad (+2)$$

$$\int_C \left(\frac{1}{xy} + \frac{z}{xy}\right) ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{(1+\mathrm{t})(1+2\mathrm{t})} + \frac{3+4t}{(1+\mathrm{t})(1+2\mathrm{t})}\right)\sqrt{21}dt \qquad (+2)\ \ldots(*)$$

$$= \sqrt{21}\int_0^1 \frac{4}{1+2t}dt = 2\sqrt{21}[\log|1+2t|]_0^1 = 2\sqrt{21}\log 3 \qquad (+2+1+2)$$

----（別解）(*)以降を以下のように解いても可

$$= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+2t} - \frac{1}{1+t} + \frac{(2\mathrm{t}^2 + 3\mathrm{t} + 1)'}{2\mathrm{t}^2 + 3\mathrm{t} + 1}\right)\sqrt{21}dt \qquad (+2)$$

$$= ([\log|1+2t|]_0^1 - [\log|1+t|]_0^1 + [\log|2\mathrm{t}^2 + 3\mathrm{t} + 1|]_0^1)\sqrt{21} \qquad (+1)$$

$= \sqrt{21}\{\log 3 - \log 1 - (\log 2 - \log 1) + \log 6 - \log 1\} = \sqrt{21}(\log 3 - \log 2 + \log 6) = 2\sqrt{21}\log 3$　(+2)