

科目	数学	分野	微分積分	1 枚目	受験 番号	小計	分野計
				3 枚中			

1

関数 $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ を微分せよ (5 点)

解答

$$y' = \frac{\cos x(1 - \cos x) - \sin^2 x}{(1 - \cos x)^2} = \frac{\cos x - 1}{(1 - \cos x)^2} = \frac{-1}{1 - \cos x}$$

2

次の積分を計算せよ。(5 点 × 2)

(1) $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx$

解答

$\log x = t$ とすると、 $\frac{1}{x} dx = dt$

よって $\int \frac{(\log x)^2}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3} (\log x)^3 + C$

積分定数がないときは 4 点

(2) $\int_1^4 (x^3 - 9x^2 + 18x - 10) dx$

解答

$$\int_1^4 (x^3 - 9x^2 + 18x - 10) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 9x^2 - 10x \right]_1^4$$
$$= 64 - 192 + 144 - 40 - \frac{1}{4} + 3 - 9 + 10 = -\frac{81}{4}$$

3

極限值 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\tan x}$ を求めよ。(5 点)

解答

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{\tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1$$

科目	数学	分野	微分積分	2枚目	受験 番号		小計	
				3枚中				

4

関数 $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + e^{-\frac{1}{x}}$ を偏微分して f_x, f_y を求めよ。(5点×2)

解答

$$\begin{aligned} f_x &= \sin \frac{1}{y} + \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ f_y &= -\frac{x}{y^2} \cos \frac{1}{y} \end{aligned}$$

5

直線 $y = x$ と曲線 $y = x^2$ で囲まれる領域を D とする。 $\iint_D (x^3 + 2xy + y^2) dx dy$ を求めよ。(10点)

解答

$$\begin{aligned} \iint_D (x^3 + 2xy + y^2) dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^x (x^3 + 2xy + y^2) dy \right\} dx = \int_0^1 \left[x^3 y + xy^2 + \frac{1}{3} y^3 \right]_{x^2}^x dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + x^3 + \frac{1}{3} x^3 - x^5 - x^5 - \frac{1}{3} x^6 \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3} x^6 - 2x^5 + x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{21} x^7 - \frac{1}{3} x^6 + \frac{1}{5} x^5 + \frac{1}{3} x^4 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{21} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{16}{105} \end{aligned}$$

科目	数学	分野	微分積分	3枚目	受験 番号	小計
				3枚中		

6

$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1$ で表される領域を D とする。

(1) $x = uv, y = u(1 - v)$ によって変数変換する。この時のヤコビアン J を求めよ。(10 点)

解答

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

$J = u$ でも正解。

(2) 重積分 $\iint_D \cos(x+y)^2 dx dy$ を求めよ (10 点)

解答

(1) のように変数変換をする。 $x + y = u$ となるので、 $0 \leq u \leq 1$ を満たす。 $x = uv \geq 0$ より $v \geq 0$, また $v = u(1 - v) \geq 0$ より $v \leq 1$ となり、範囲は $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$ となる。

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x+y)^2 dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \cos u^2 \cdot u du \right\} dv \\ u^2 = t \text{ とすると、} 2u du &= dt \quad 0 \leq u \leq 1 \text{ に対応する } t \text{ の範囲は } 0 \leq t \leq 1 \text{ となる。} \\ \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \cos u^2 \cdot u du \right\} dv &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2} \cos t dt \right\} dv \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} \sin t \right]_0^1 dv \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \sin 1 dv \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 1 v \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \sin 1 \end{aligned}$$

科目	数学	分野	線形代数	1 枚目	受験 番号		小 計		分 野 計	
				2 枚中						

1

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ を求めよ (5 点)

解答

行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 80 + 0 + 28 - 120 - 6 - 0 = -18$

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ。(5 点)

解答

余因子を求めていく。

$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 10, \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 28 = -22, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20,$
 $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 24 = -8, \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -4,$
 $\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 30 = -23, \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 = 38, \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 3 = 37,$

よって逆行列は

$-\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 10 & -2 & -23 \\ 22 & -8 & -38 \\ -20 & 4 & 37 \end{pmatrix}$

科目	数学	分野	線形代数	2枚目	受験 番号		小計	
				2枚中				

2

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$ が表す一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ (10 点)

解答

固有方程式は $\lambda^2 - 5\lambda - 84 = 0$

$$(\lambda + 7)(\lambda - 12) = 0$$

$$\lambda = 12, -7$$

よって固有値は $12, -7$ (ここまでで 5 点)

$\lambda = 12$ のとき固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -11 & 11 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、 $-11x + 11y = 0$ よって

c_1 を任意の定数として固有ベクトルは $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -7$ のとき固有ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であるから、 $8x + 11y = 0$ よって c_2

を任意の定数として固有ベクトルは $c_2 \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \end{pmatrix}$

固有ベクトルが片方のみ正解のときは 8 点

本来 c_1, c_2 は 0 以外の定数であるが、その表記がなくても正解とする。

科目	数学	分野	微分方程式	1 枚目	受験 番号		小 計		分 野 計	
				2 枚中						

1

次の微分方程式の解をもとめよ。(5 点 ×2)

(1) $t(t+1)\frac{dx}{dt} - (2t+1)x = t^4 + 2t^3 + t^2$

解答

齊次微分方程式は $t(t+1)\frac{dx}{dt} = (2t+1)x$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2t+1}{t^2+t} dt$$

$$\log |x| = \log |t^2+t| + c_1$$

$$x = \pm e^{c_1}(t^2+t) \text{ (ここまで 2 点)}$$

$$x = u(t^2+t) \text{ とすると、} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}(2t+1) - u(t^2+t)$$

これを微分方程式に代入して

$$\frac{du}{dt}t^2(t+1)^2 - (2t+1)u(t^2+t) - (2t+1)u(t^2+t) = t^2(t+1)^2$$

$$\frac{du}{dt} = 1$$

$$u = t + c$$

$$x = (t+c)(t^2+t) = t^3 + t^2 + c(t^2+t)$$

c, c_1 は任意の定数。

(2) $2\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - x = 0$

解答

$$\text{特性方程式は } 2\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\text{よって一般解は } x = c_1 e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}t} + c_2 e^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}t}$$

c_1, c_2 は任意の定数。

科目	数学	分野	微分方程式	2枚目	受験 番号		小計	
				2枚中				

2

与えられた条件で次の微分方程式の特殊解を求めよ。(5点×2)

(1) $\frac{dx}{dt} = x \sin t$, ($t = 0$ のとき $x = 1$)

解答

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \sin t dt$$

$$\log |x| = -\cos t + c_1$$

$$x = \pm e^{c_1} e^{-\cos t} = c_2 e^{-\cos t}$$

(ここまで3点)

ここで初期条件を代入すると $1 = c_2 e^{-1}$ よって $c_2 = e$

特殊解は $x = e^{1-\cos t}$

(2)

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 7 \frac{dx}{dt} - 8x + 18e^{2t} = 0, (t = 0 \text{ のとき } x = 1, \frac{dx}{dt} = -7)$$

解答

特性方程式は $\lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda + 1)(\lambda - 8) = 0$ で特性解は $\lambda = -1, 8$ となる。

よって一般解は $x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{8t}$ となる。

特殊解を $x = ae^{2t}$ とすると、 $\frac{dx}{dt} = 2ae^{2t}$, $\frac{d^2 x}{dt^2} = 4ae^{2t}$

これを方程式に代入すると

$$4ae^{2t} - 14ae^{2t} - 8ae^{2t} + 18e^{2t} = 0$$

$$-18a + 18 = 0, a = 1 \text{ となる。}$$

よって特殊解は $x = e^{2t}$ となり、一般解は $x = e^{2t} + c_1 e^{-t} + c_2 e^{8t}$ となる。(ここまでで3点、斉次の一般解または特殊解だけ正解のときは2点)

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t} - c_1 e^{-t} + 8c_2 e^{8t}$$

初期条件を代入すると

$$\begin{cases} 1 = 1 + c_1 + c_2 \\ -7 = 2 - c_1 + 8c_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = 1 + c_1 + c_2 \\ -7 = 2 - c_1 + 8c_2 \end{cases}$$

これを解いて $c_1 = 1, c_2 = -1$

$$\text{よって } x = e^{2t} + e^{-t} - e^{8t}$$

科目	数 学	分野	応用数学	1 枚目	受験 番号		小 計		分 野 計	1 枚目のみ
				1 枚中						

以下、 $\nabla = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ を表すものとする.

1 スカラー場 $\varphi = x + y + z$ について、次のものを求めよ. (10 点)

(1) $\nabla\left(\frac{1}{\varphi}\right)$

(2) $\nabla^2\varphi$

(3) $|\nabla\varphi|^2$

(4) $\nabla(\varphi^5)$

(5) $\nabla^2(\varphi^5)$

(1) $\nabla\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \nabla\left(\frac{1}{x+y+z}\right) = \frac{-1}{(x+y+z)^2}\mathbf{i} + \frac{-1}{(x+y+z)^2}\mathbf{j} + \frac{-1}{(x+y+z)^2}\mathbf{k} = \frac{-(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})}{(x+y+z)^2}$ (+2)

(2) $\nabla^2\varphi = \nabla \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 0$ (+2)

(3) $|\nabla\varphi|^2 = (\nabla\varphi) \cdot (\nabla\varphi) = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = 3$ (+2)

(4) $\nabla(\varphi^5) = \nabla(x + y + z)^5 = 5(x + y + z)^4(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ (+2)

(5) $\nabla^2(\varphi^5) = \nabla \cdot \nabla(\varphi^5) = \nabla \cdot \{5(x + y + z)^4(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\}$
 $= 20(x + y + z)^3 + 20(x + y + z)^3 + 20(x + y + z)^3 = 60(x + y + z)^3$ (+2)

2 経路 C は始点 P(4,1,-1), 終点 Q(8,2,0) とを直線的に結ぶ経路である. 線積分

$$\int_C \left(\frac{1}{x+yz}\right) ds$$

を求めよ. ただし s は弧長である. (10 点)

経路 C は $\mathbf{r} = (4 + 4t)\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + (-1 + t)\mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$) と表せる. (+1)

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = 3\sqrt{2}$ (+2)

$\int_C \left(\frac{1}{x+yz}\right) ds = \int_0^1 \left(\frac{1}{4 + 4t + (t+1)(t-1)}\right) 3\sqrt{2} dt$ (+2)

$= 3\sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt = 3\sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{(t+3)(t+1)} dt = 3\sqrt{2} \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\right) dt$ (+3)

$= \frac{3\sqrt{2}}{2} [\log|t+1| - \log|t+3|]_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{2} \log \frac{3}{2}$ (+2)