

|    |    |    |      |      |          |  |    |  |     |  |
|----|----|----|------|------|----------|--|----|--|-----|--|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分積分 | 1 枚目 | 受験<br>番号 |  | 小計 |  | 分野計 |  |
|    |    |    |      | 3 枚中 |          |  |    |  |     |  |

## 1

$0 < x < 1$  のとき次の関数を微分せよ (5 点)

$$y = \sin^{-1} \sqrt{x}$$

解答

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

## 2

次の積分をもとめよ。(5 点 × 2)

$$(1) \int_1^2 (x-1)^2 e^{-x} dx$$

解答

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x-1)^2 e^{-x} dx &= [-(x-1)^2 e^{-x}]_1^2 + \int_1^2 2(x-1)e^{-x} dx \\ &= -e^{-2} + [-2(x-1)e^{-x}]_1^2 + \int_1^2 2e^{-x} dx \\ &= -e^{-2} - 2e^{-2} + [-2e^{-x}]_1^2 \\ &= -3e^{-2} - 2e^{-2} + 2e^{-1} = 2e^{-1} - 5e^{-2} \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{dx}{x^2 + x + 1}$$

解答

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} &= \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2}\right) + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

積分定数がないとき 4 点

|    |    |    |      |     |          |    |
|----|----|----|------|-----|----------|----|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分積分 | 2枚目 | 受験<br>番号 | 小計 |
|    |    |    |      | 3枚中 |          |    |

### 3

次の極限值を求めよ (5点)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2 + 1)}{x}$$

解答

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x^2 + 1)}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ より}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x^2 + 1)}{x} = 0$$

### 4

関数  $f(x, y) = xy \log |x - y|$  を偏微分して  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  を求めよ。(5点 × 2)

解答

$$f_x(x, y) = y \log |x - y| + \frac{xy}{x - y} \text{ (5点)}$$

$$f_y(x, y) = x \log |x - y| - \frac{xy}{x - y} \text{ (5点)}$$

解答の分母の  $x - y$  に絶対値がついているものは4点。最後の答えだけ書き間違えたとき4点。

### 5

$x$  軸、 $y$  軸、直線  $x + 2y = 2$  で囲まれる領域を  $D$  とする。 $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  を求めよ。(10点)

解答

範囲は  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 1$  となる。

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^2 \left\{ \int_0^{-\frac{1}{2}x+1} (x^2 + y^2) dy \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left[ x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{-\frac{1}{2}x+1} dx = \int_0^2 \left\{ x^2 \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) + \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right)^3 \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left( -\frac{1}{2}x^3 + x^2 \right) dx + \frac{1}{3} \int_0^2 \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right)^3 dx \quad \left( -\frac{1}{2}x + 1 = t \text{ と置換する} \right) \\ &= \left[ -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 + \frac{1}{3} \int_1^0 t^3 (-2tdt) \\ &= -2 + \frac{8}{3} + \frac{2}{3} \int_0^1 t^3 dt = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \left[ \frac{1}{4}t^4 \right]_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

答えが約分してないとき9点

|    |    |    |      |     |          |    |
|----|----|----|------|-----|----------|----|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分積分 | 3枚目 | 受験<br>番号 | 小計 |
|    |    |    |      | 3枚中 |          |    |

## 6

$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$  で表される領域を  $D$  とする。

(1)  $x = r \cos \theta, y = 2r \sin \theta$  と変換する。この変換のヤコビアンを求めよ (10 点)

解答

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 2r \cos \theta \end{vmatrix} = 2r \cos^2 \theta + 2r \sin^2 \theta = 2r$$

$-2r$  も正解

(2) 重積分  $\iint_D e^{x^2 + \frac{y^2}{4}} dx dy$  を求めよ (10 点)

解答

$x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1$  に  $x = r \cos \theta, y = 2r \sin \theta$  を代入すると  $r^2 \leq 1$

よって範囲は  $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\iint_D e^{x^2 + \frac{y^2}{4}} dx dy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 2r e^{r^2} dr \right\} d\theta$$

ここで  $r^2 = t$  とすると  $2r dr = dt, 0 \leq t \leq 1$  となる。よって

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 2r e^{r^2} dr \right\} d\theta = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 e^t dt \right\} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [e^t]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (e - 1) d\theta$$

$$= 2\pi(e - 1)$$

となる。ヤコビアンの  $2r$  の  $2$  が抜けていた時、5 点

(前期, 先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む)

|    |    |    |      |     |
|----|----|----|------|-----|
| 科目 | 数学 | 分野 | 線形代数 | 1枚目 |
|    |    |    |      | 2枚中 |

|          |  |
|----------|--|
| 受験<br>番号 |  |
|----------|--|

|    |  |
|----|--|
| 小計 |  |
|----|--|

|     |  |
|-----|--|
| 分野計 |  |
|-----|--|

1

(1) 行列式  $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$  を求めよ。(5点)

解答

$$|A| = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 0 - (4 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 0) = -1$$

(2) 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  の逆行列を求めよ(5点)

解答

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

よって逆行列は

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

余因子によって求めた場合、一つ間違えたら3点、二つ以上間違えたら0点

|    |    |    |      |      |          |        |
|----|----|----|------|------|----------|--------|
| 科目 | 数学 | 分野 | 線形代数 | 2 枚目 | 受験<br>番号 | 小<br>計 |
|    |    |    |      | 2 枚中 |          |        |

2

行列  $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$  が表す一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ (10 点)

解答

固有方程式は  $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = 2, -3$$

よって固有値は  $2, -3$  (ここまでに 5 点)

$\lambda = 2$  のとき固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は  $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  であるから、 $x - 3y = 0$  よって  $c_1$  を任意

の定数として固有ベクトルは  $c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -3$  のとき固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は  $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  であるから、 $2x - y = 0$  よって  $c_2$  を

任意の定数として固有ベクトルは  $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

固有ベクトルが片方のみ正解のときは 8 点。固有値が片方のみ正解で対応する固有ベクトルが正解のときは 5 点。本来  $c_1, c_2$  は 0 以外の定数であるが、その表記がなくても正解とする。

|    |    |    |       |
|----|----|----|-------|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分方程式 |
|----|----|----|-------|

1 枚目

2 枚中

|          |  |
|----------|--|
| 受験<br>番号 |  |
|----------|--|

|    |  |
|----|--|
| 小計 |  |
|----|--|

|     |  |
|-----|--|
| 分野計 |  |
|-----|--|

## 1

次の微分方程式の解をもとめよ。(5点×2)

$$(1) \frac{dx}{dt} + 2x = 2t^3 + 3t^2$$

解答

$$\frac{dx}{dt} = -2x \text{ を解く。} \frac{dx}{dt} \frac{1}{x} = -2$$

$$\int \frac{dx}{x} = - \int 2dt$$

$$\log |x| = -2t + c_1$$

$$x = c_2 e^{-2t} \text{ となる。 (ここまでで 2 点)}$$

$$x = ue^{-2t} \text{ とする。} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} e^{-2t} - 2ue^{-2t}$$

$$\text{これを方程式に代入して} \frac{du}{dt} e^{-2t} - 2ue^{-2t} + 2ue^{-2t} = 2t^3 + 3t^2$$

$$\frac{du}{dt} = (2t^3 + 3t^2)e^{2t}$$

$$u = - \int (2t^3 + 3t^2)e^{2t} dt = \frac{1}{2} e^{2t} (2t^3 + 3t^2) - \int (3t^2 + 3t)e^{2t} dt$$

$$= e^{2t} (t^3 + \frac{3}{2}t^2) - \left\{ \frac{1}{2} (3t^2 + 3t)e^{2t} - \frac{1}{2} \int (6t + 3)e^{2t} dt \right\}$$

$$= e^{2t} (t^3 - \frac{3}{2}t) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (6t + 3)e^{2t} - \frac{1}{4} \int 6e^{2t} dt \right\}$$

$$= e^{2t} (t^3 + \frac{3}{4}) - \frac{3}{4} e^{2t} + c$$

$$= e^{2t} t^3 + c$$

$$x = ue^{-2t} = (t^3 e^{2t} + c)e^{-2t} = t^3 + ce^{-2t}$$

( $c_1, c_2, c$  は任意の定数)  $x = t^3$  のみ正しかった時 2 点

$$(2) \frac{d^2x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 100x = 810e^t$$

解答

特性方程式は  $\lambda^2 - 20\lambda + 100 = (\lambda - 10)^2 = 0$  よって  $\lambda = 10$  の重解

斉次の一般解は  $x = (c_1 + c_2 t)e^{10t}$ ,  $c_1, c_2$  は任意の定数。(ここまでで 2 点)

特殊解を  $x = ae^t$  とすると,  $\frac{dx}{dt} = ae^t$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = ae^t$  これらを微分方程式に代入すると,  
 $ae^t - 20ae^t + 100ae^t = 810e^t$

$$81a = 810$$

よって  $a = 10$

特殊解は  $x = 10e^t$  となる。(特殊解のみ正解の場合は 2 点)

非斉次の一般解は  $x = 10e^t + (c_1 + c_2 t)e^{10t}$  である。  $c_1, c_2$  は任意の定数。

(前期, 先端融合テクノロジー連携教育プログラムを含む)

|    |    |    |       |     |          |    |
|----|----|----|-------|-----|----------|----|
| 科目 | 数学 | 分野 | 微分方程式 | 2枚目 | 受験<br>番号 | 小計 |
|    |    |    |       | 2枚中 |          |    |

## 2

与えられた条件で次の微分方程式の特殊解を求めよ。(5点×2)

(1)  $\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{\sin x}$ , ( $t = 0$  のとき  $x = \frac{\pi}{3}$ )  
 $0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ ,  $-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi$  とする。

解答

$$\int \sin x dx = \int \cos t dt$$

$$\cos x = -\sin t + c$$

(ここまで3点)

ここで初期条件を代入すると  $\cos \frac{\pi}{3} = -\sin 0 + c$  よって  $c = \frac{1}{2}$

特殊解は  $\cos x = -\sin t + \frac{1}{2}$

(2)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0, (t = 0 \text{ のとき } x = 10, \frac{dx}{dt} = 10)$$

解答

特性方程式は  $\lambda^2 + 10 = 0$  で特性解は  $\lambda = \pm\sqrt{10}i$  となる。

よって一般解は  $x = c_1 \cos \sqrt{10}t + c_2 \sin \sqrt{10}t$  となる。(ここまで3点)

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{10}c_1 \sin \sqrt{10}t + \sqrt{10}c_2 \cos \sqrt{10}t$$

初期条件を代入すると

$$c_1 = 10, c_2 = \sqrt{10}$$

よって  $x = 10 \cos \sqrt{10}t + \sqrt{10} \sin \sqrt{10}t$

|    |    |    |      |      |          |  |        |  |             |        |
|----|----|----|------|------|----------|--|--------|--|-------------|--------|
| 科目 | 数学 | 分野 | 応用数学 | 1 枚目 | 受験<br>番号 |  | 小<br>計 |  | 分<br>野<br>計 | 1 枚目のみ |
|    |    |    |      | 1 枚中 |          |  |        |  |             |        |

1 4点 $O(0,0,0)$ ,  $P(1,2,2)$ ,  $Q(2,2,1)$ ,  $R(2,-1,-3)$ がある. 以下のものを求めよ. (10点)

- (1)  $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ のなす角を $\theta$ としたとき,  $\cos \theta$   
 (2) 三角形  $OPQ$  に対する単位法線ベクトル  
 (3) 三角形  $OPQ$  に平行で点  $R$  を通る平面の方程式  
 (4)  $OP, OQ, OR$  を3辺とする平行六面体の体積  $V$

$$(1) \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2+4+2}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9} \quad (+1)$$

$$(2) \mathbf{n} = \pm \frac{\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}|} = \pm \frac{-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-2)^2}} = \pm \frac{-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{\sqrt{17}} \quad (+2, \text{単位ベクトルでなければ} +1)$$

(3)  $\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ は求める平面の法線ベクトルであるから  
 $(x-2, y+1, z+3) \cdot (-2, 3, -2) = 0 \quad (+2)$   
 よって  $-2x + 3y - 2z = -1 \quad (+1)$

$$(4) V = |(\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OR}| = |(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})| = 1 \quad (+2)$$

2 ベクトル場 $\mathbf{a} = x^2z\mathbf{i} + x^2y^2\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$ とする.

原点 $O(0,0,0)$ から $P(1,2,2)$ に至る直線的な経路に沿って $\text{rota}$ の線積分を求めよ. (10点)

$$\text{rota} = 2yz\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 2xy^2\mathbf{k} \quad (+2)$$

$O(0,0,0)$ から $P(1,2,2)$ に至る直線的な経路は

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (+2)$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad (+2)$$

経路に沿っての $\text{rota}$ の線積分は

$$\int_C \text{rota} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (8t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 8t^3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) dt \quad (+2)$$

$$= \int_0^1 (10t^2 + 16t^3) dt = \left[ \frac{10}{3}t^3 + \frac{16}{4}t^4 \right]_0^1 = \frac{22}{3} \quad (+2)$$