

科目	数学	分野	微分積分	1 枚目	受験 番号		小計		分野計	
				3 枚中						

1

$x > \sqrt{2}$  のとき関数  $f(x) = \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$  を微分せよ。(5点)

解答

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2 - 1}}} \cdot \left(-\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right) = \frac{x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 2}}$$

2

次の積分をもとめよ。(5点×2)

(1)  $\int_1^2 (-x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 7x - 2)dx$

解答

$$\int_1^2 (-x^4 + 5x^3 - 9x^2 + 7x - 2)dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{4}x^4 - 3x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x\right]_1^2$$

$$= -\frac{32}{5} + 20 - 24 + 14 - 4 - \left(-\frac{1}{5} + \frac{5}{4} - 3 + \frac{7}{2} - 2\right) = \frac{1}{20}$$

(2)  $\int (x + 1) \log x dx$

解答

$$\text{部分積分により } \int (x+1) \log x dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \log x - \int \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \frac{1}{x} dx = \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \log x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right) \log x - \frac{1}{4}x^2 - x + C$$

積分定数 C が\*ないとき 4 点

科目	数学	分野	微分積分	2枚目	受験 番号	小計
				3枚中		

3

極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan^{-1} x - x}$  を求めよ。(5点)

解答

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan^{-1} x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{x^2+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{-x^2} = -\infty$$

4

関数  $f(x, y) = \frac{x-y}{xy-1}$  を偏微分して  $f_x, f_y$  を求めよ。(5点×2)

解答

$$f_x = \frac{xy - 1 - (x-y)y}{(xy-1)^2} = \frac{y^2 - 1}{(xy-1)^2}$$

$$f_y = \frac{-(xy-1) - x(x-y)}{(xy-1)^2} = \frac{1-x^2}{(xy-1)^2}$$

5

$x$  軸、 $y$  軸、直線  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $y = \frac{\pi}{4}$  で囲まれた領域を  $D$  とする。 $\iint_D \cos(x+y) dx dy$  を求めよ。(10点)

解答

積分範囲は  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}$  となる。よって

$$\begin{aligned} \iint_D \cos(x+y) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x+y) dy \right\} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sin(x+y)]_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x \right\} dx \\ &= \left[ -\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

科目	数学	分野	微分積分	3枚目	受験 番号	小計
				3枚中		

6

(1)  $x, y$  は正の実数とする。  $u = xy, v = \frac{y}{x}$  と変数の組  $(x, y)$  を変数の組  $(u, v)$  に変換するときのヤコビアンを求めよ (10点)

解答

$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$  と変形できるから、  $x_u = \frac{1}{2\sqrt{uv}}, x_v = -\frac{1}{2}\sqrt{uv}^{-\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}, y_u = \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}}, y_v = \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}$  となる。

ヤコビアンは

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

$-\frac{1}{2v}$  でも正解

(2)  $1 \leq xy \leq 2, \frac{1}{2} \leq \frac{y}{x} \leq 1$  で表される領域を  $D$  とする。重積分  $\iint_D e^{xy} dx dy$  を求めよ。(10点)

解答

$u, v$  に変数変換すると範囲は  $1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 1$  である。よって積分は

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \left\{ \int_1^2 \frac{e^u}{2v} du \right\} dv = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2v} [e^u]_1^2 dv = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{2v} (e^2 - e) dv = \frac{1}{2} (e^2 - e) [\log v]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2} (e^2 - e) \log 2$$

科目	数学	分野	線形代数	1枚目	受験 番号		小計		分野計	
				2枚中						

1

行列  $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$  がある。

(1) 行列式  $|A|$  を求めよ (5点)

解答

$$|A| = a \cdot (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 5 - a \cdot (-1) \cdot 2 = -13a - 37$$

(2)  $a = -3$  のとき  $A$  の逆行列をもとめよ。(5点)

解答

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 16 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -18 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -11 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -16 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

よって逆行列は

$$\begin{pmatrix} -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2} & \frac{7}{2} \\ -9 & -8 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

行列式を余因子で求めるときは余因子が1つまちがっているとき3点、二つ以上間違っているとき0点

科目	数学	分野	線形代数	2枚目	受験 番号	小計
				2枚中		

## 2

行列  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  が表す一次変換の固有値と固有ベクトルを求めよ (10点)

解答

固有方程式は  $(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 2 = \lambda^2 - 3 = 0$

よって  $\lambda = \pm\sqrt{3}$

よって固有値は  $\pm\sqrt{3}$  (ここまでで5点)

$\lambda = \sqrt{3}$  のとき固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は  $\begin{pmatrix} 1 - \sqrt{3} & 2 \\ 1 & -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  であるから、

$$(1 - \sqrt{3})x + 2y = 0$$

よって  $c_1$  を任意の定数として固有ベクトルは  $c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{3} - 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = -\sqrt{3}$  のとき固有ベクトル  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  は  $\begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 2 \\ 1 & -1 + \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  であるから、

$$(1 + \sqrt{3})x + 2y = 0$$

よって  $c_2$  を任意の定数として固有ベクトルは  $c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$

固有ベクトルが片方のみ正解のときは8点

本来  $c_1, c_2$  は0以外の定数であるが、その表記がなくても正解とする。

科目	数学	分野	微分方程式	1枚目	受験 番号	小計	分野 計
				2枚中			

1

次の微分方程式の解をもとめよ。(5点×2)

(1)  $\frac{dx}{dt} = x(\log t + 1)$

解答

$$\int \frac{dx}{x} = \int (\log t + 1) dt$$

$$\log |x| = t(\log t + 1) - \int t \cdot \frac{1}{t} dt = t(\log t + 1) - t = t \log t + c_1$$

$$x = \pm e^{c_1} e^{t \log t}$$

$$C = \pm e^{c_1} \text{ として } x = C e^{t \log t} = C t^t$$

$x = C e^{t \log t}$ ,  $x = C t^t$  のどちらも正解。

$c_1, C$  は任意の定数。

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0$

解答

特性方程式は  $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$  解の公式により  $\lambda = -2 \pm i$

よって一般解は  $x = e^{-2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$  である。 $c_1, c_2$  は任意の定数。

科目	数学	分野	微分方程式	2枚目	受験 番号	小計
				2枚中		

## 2

与えられた条件で次の微分方程式の特殊解を求めよ。(5点×2)

(1)  $t \frac{dx}{dt} = 2x + t^3$ , ( $t = 1$  のとき  $x = 3$ )

解答

$$t \frac{dx}{dt} = 2x$$

を解くと、 $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2dt}{t}$

$$\log|x| = 2 \log|t| + c_1, x = \pm e^{c_1} t^2 \text{ (ここまでに2点)}$$

$$x = ut^2 \text{ とすると、} \frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} t^2 + 2ut$$

これを方程式に代入すると

$$\frac{du}{dt} t^3 + 2t^2 u = 2ut^2 + t^3$$

これより  $\frac{du}{dt} = 1$  よって  $u = t + c_2$ ,  $x = (t + c_2)t^2$  となる。(ここまでに4点) 初期条件を代入すると  $3 = 1 + c_2$  よって  $c_2 = 2$

$$\text{解は } x = (t + 2)t^2 = t^3 + 2t^2$$

(2)  $\frac{d^2x}{dt^2} - 7\frac{dx}{dt} + 10x = 10t^3 - 21t^2 + 6t$ , ( $t = 0$  のとき  $x = 0$ ,  $\frac{dx}{dt} = -3$ )

解答

特性方程式は  $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$  で特性解は  $\lambda = 2, 5$  となる。

よって斉次の一般解は  $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t}$  となる。(ここまでに2点)

特殊解を  $x = at^3 + bt^2 + ct + d$  とすると  $\frac{dx}{dt} = 3at^2 + 2bt + c$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = 6at + 2b$

方程式に代入すると

$$6at + 2b - 7(3at^2 + 2bt + c) + 10(at^3 + bt^2 + ct + d) = 10t^3 - 21t^2 + 6t$$

$$10at + (-21a + 10b)t^2 + (6a - 14b + 10c)t + 2b - 7c + 10d = 10t^3 - 21t^2 + 6t$$

これより  $a = 1, b = c = d = 0$  となる。

非斉次の一般解は  $x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t} + t^3$  (ここまでに4点)

微分すると  $\frac{dx}{dt} = 2c_1 e^{2t} + 5c_2 e^{5t} + 3t^2$

初期条件を代入して

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + 5c_2 = -3 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて  $c_1 = 1, c_2 = -1$

よって特殊解は  $x = e^{2t} - e^{5t} + t^3$

科目	数学	分野	応用数学	1 枚目	受験 番号	小計	分野 計
				1 枚中			

1  $\mathbf{a} = j + 2k, \mathbf{b} = pi + k, \mathbf{c} = 2i + j + k$  とする。以下のそれぞれの場合に定数  $p$  を求めよ。

(10 点)

- (1)  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  のなす角が  $\frac{\pi}{4}$  であるとき
- (2)  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  を 2 辺とする平行四辺形の面積が 6 であるとき
- (3)  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  を 3 辺とする平行六面体の体積が 5 であるとき
- (4) ベクトル  $\mathbf{c}$  が  $\mathbf{a}$  と  $\mathbf{b}$  で作られる平面上にあるとき

$$(1) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{p^2+1}}{\sqrt{2}} = 2 \quad \text{より } 5(p^2+1) = 8 \quad \text{(2)} \quad p = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \quad (+1)$$

$$(2) \mathbf{a} \times \mathbf{b} = i + 2pj - pk \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + 4p^2 + p^2} = \sqrt{5p^2 + 1} = 6 \quad (+2)$$

よって  $p = \pm\sqrt{7} \quad (+1)$

$$(3) |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |2 + p| = 5 \quad 2 + p = \pm 5 \quad p = -7, 3 \quad (+2)$$

$$(4) \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ の法線ベクトルとベクトル } \mathbf{c} \text{ とは直交する.}$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 2 + p = 0 \quad p = -2 \quad (+2)$$

2 ベクトル場  $\mathbf{a} = z^2xi + x^2yj + y^2zk$  とする。

点 P(1,0,1) から点 Q(0,2,2) に至る直線的な経路に沿って  $\text{div} \mathbf{a}$  の線積分

$$\int_{PQ} \text{div} \mathbf{a} \cdot ds$$

を求めよ。ただし  $s$  は弧長とする。(10 点)

$$\text{div} \mathbf{a} = z^2 + x^2 + y^2 \quad (+2)$$

$$\text{点 P(1,0,1) から点 Q(0,2,2) に至る経路 } \mathbf{r} = (1-t)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (1+t)\mathbf{k} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (+2)$$

$$\text{経路に沿って } \text{div} \mathbf{a} = (1+t)^2 + (1-t)^2 + 4t^2 = 6t^2 + 2 \quad (+2)$$

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \quad (+1)$$

$$\int_{PQ} \text{div} \mathbf{a} \cdot ds = \int_0^1 (6t^2 + 2) \sqrt{6} dt = \sqrt{6} [2t^3 + 2t]_0^1 = 4\sqrt{6} \quad (+2) \quad (+1)$$