

計測工学21

相関関数

相関法の注意点

- 相関法を行う前に、データの平均を0にしておく(データから平均を差し引いておく=オフセットを除去する)

$x(t), y(t)$ は平均0のデータであるとする。

今、オフセットのあるデータ

$$X(t) = x(t) + C, \quad Y(t) = y(t) + D$$

を観測したとする。この時、 $X(t), Y(t)$ で相関を求めると

$$\begin{aligned} \phi_{xy}(m) &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} X(i)Y(i+m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x(i) + C)(y(i+m) + D) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \{x(i)y(i+m) + Dx(i) + Cy(i+m) + CD\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)y(i+m) + D \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i) + C \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i+m) + CD \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} 1 \\ &= \phi_{xy}(m) + C \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} y(i+m) + CD \end{aligned}$$

となり、オフセットが大きい場合、

(1) 上式第3項CDが大きく、相関関数の変化が埋もれて見えにくくなる

(2) 第2項の値が0とならず、 m によって値が変わるため、相関関数の形そのものがかわるなどの影響が出る。

演習

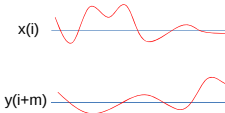
- Excelで相互相関 演習2を行い、オフセットの影響を確認する

自己相関関数

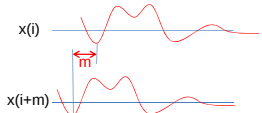
- 相互相関関数の式における $y(t)$ を $x(t)$ に置き換え、自分自身との相関をみる

$$\phi_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x(i)x(i+m)$$

相互相関関数(2つの波形の相関関数)



自己相関関数(1つの波形の相関関数)



自己相関関数の性質

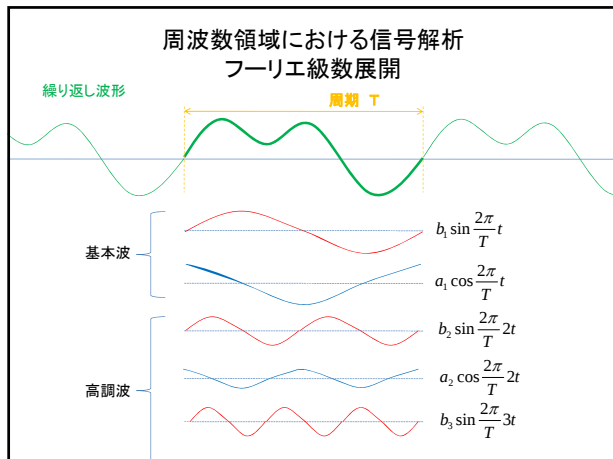
- 自己相関関数の性質
 - 偶関数 $\Phi_{xx}(m) = \Phi_{xx}(-m)$



- $m=0$ で最大(2つの波形の類似度最大)
- 不規則信号では、 $\Phi_{xx}(0)$ 以外は $\Phi_{xx}(m)=0$
- 周期関数に対しては、 $\Phi_{xx}(m)$ も周期関数
($\Phi_{xx}(m)$ が最大となるところで、関数の周期がわかる)

演習

- 自己相関関数に関する演習問題を行い、自己相関関数の性質を確認する。



フーリエ級数展開 式

- 周期 T の繰り返し波形 $x(t)$ は

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \left(a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T}t \right) + \left(a_2 \cos \frac{2\pi}{T}2t + b_2 \sin \frac{2\pi}{T}2t \right) + \cdots$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi}{T}nt + b_n \sin \frac{2\pi}{T}nt \right)$$

となる

フーリエ係数の求め方

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt \quad \text{直流分}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$$

$n=1$ のとき基本波
 $n>1$ のとき高調波

例) a1

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_0^T \left[\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t + b_1 \sin \frac{2\pi}{T}t + a_2 \cos \frac{2\pi}{T}2t + \cdots \right] \cos \frac{2\pi}{T}t dt$$

$$= \frac{2}{T} \left[\int_0^T \frac{a_0}{2} \cos \frac{2\pi}{T}t dt + \int_0^T a_1 \cos \frac{2\pi}{T}t \cos \frac{2\pi}{T}t dt + \int_0^T b_1 \sin \frac{2\pi}{T}t \cos \frac{2\pi}{T}t dt + \cdots \right]$$

0 0でない 0

演習

- Excelのシート「フーリエ級数基礎」で、正弦波どうしの積が、同じ周期同士の場合のみ0でないことを確認する。(演習1)
- また、 $\sin(2\pi ft) + \sin(2\pi 3ft)$ の波形についてフーリエ級数展開を試み、フーリエ係数を求める(演習2)

離散フーリエ変換

- フーリエ級数展開
 - 繰り返し波形を基本波と高調波の和として表す
- フーリエ変換
 - 繰り返しでない波形についても各周波数成分の和として表す
 - フーリエ級数展開における周期 T が ∞ になったと考えてもよい(基本波の周波数が $1/\infty$ に低くなり、周波数の間隔が $1/\infty$ に小さくなり、周波数成分は連続になる)
- 離散フーリエ変換
 - サンプリングした波形についてフーリエ級数展開
 - サンプリングしたデータの繰り返し波形についてのフーリエ級数展開
 - サンプリング周波数 f_s に対して $f_s/2$ までの周波数成分でサンプリングされたデータを表す。

離散フーリエ変換

フーリエ級数展開(離散有限フーリエ逆変換(IDFT))

$$x_m = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N/2-1} \left\{ a_k \cos \frac{2\pi km}{N} + b_k \sin \frac{2\pi km}{N} \right\} + \frac{a_{N/2}}{2} \cos \frac{2\pi(N/2)m}{N}$$

ただし、 $m = 0, 1, 2, \cdots, (N-1)$

離散有限フーリエ変換(DFT)

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cos \frac{2\pi km}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \left(\frac{N}{2} \right)$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sin \frac{2\pi km}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \left(\frac{N}{2} - 1 \right)$$