

計測工学9

データの補間

復習 Excelで近似曲線を計算するための方程式

- 線形近似 $y = mx + b$
 m は傾き、 b は y 切片
- 多項式近似 $y = b + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots + c_6x^6$
 b と $c_1 \sim c_6$ は定数です。
- 対数近似 $y = c \ln x + b$
 c と b は定数
- 指数近似 $y = ce^{bx}$
 c と b は定数
- 累乗近似 $y = cx^b$
この式の c と b は定数です。
- 移動平均
近くの n 個のデータの平均をとる
ノイズの大きい信号系列のノイズ低減 (デジタルフィルタとして言えば、ローパスフィルタの機能がある)

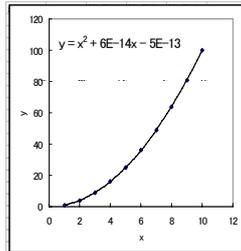
青字で表わした定数が最小二乗法によって決められる数値

階差の例1

$Y=x^2$ の場合 (誤差なし)

x	y	第1階差	第2階差	第3階差
1	1	3	2	0
2	4	5	2	0
3	9	7	2	0
4	16	9	2	0
5	25	11	2	0
6	36	13	2	0
7	49	15	2	0
8	64	17	2	0
9	81	19	2	0
10	100			

2次式で近似

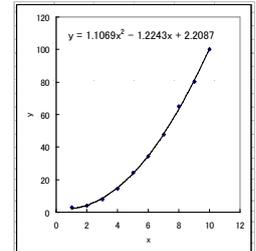


階差の例2

$Y=x^2$ の場合 (誤差あり)

x	y	第1階差	第2階差	第3階差	第4階差
1	2.7904	1.20819	2.62166	0.08452	0.41759
2	3.9985	3.82888	2.7062	0.50252	-3.0624
3	7.8284	6.53608	3.20872	-2.5598	4.8749
4	14.365	9.7448	0.64888	2.31506	-1.411
5	24.109	10.3937	2.96394	0.90408	-6.9257
6	34.503	13.3516	3.88802	-6.9216	11.0457
7	47.881	17.2256	-2.1536	5.02411	
8	65.086	15.0721	2.87056		
9	80.158	17.9427			
10	98.101				
平均	10.5901	2.09181	0.03555	0.82326	

(3-1) 次式で近似

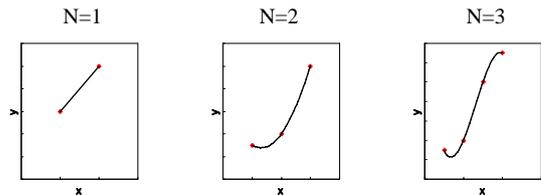


Excelで演習

- 階差に関する演習問題を解く

ラグランジュの補間公式

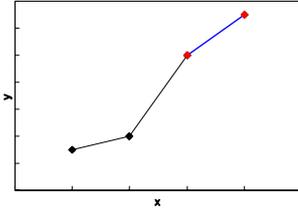
- $N+1$ 個のデータを通る多項式は？



N 次式で $N+1$ 個のデータを完全に通ることができる

ラグランジュの補間公式

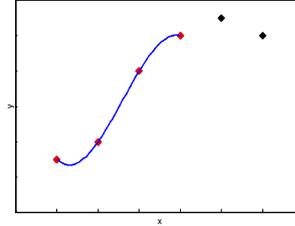
- N+1点のデータを通るN次式を求め、この式で補間する
- 例) N=1の場合
 - 2点のデータを通る1次式(直線)を求めて補間する



39

ラグランジュの補間公式

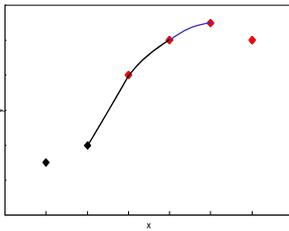
- N+1点のデータを通るN次式を求め、この式で補間する
- 例) N=3の場合
 - 4点のデータを通る3次式を求めて補間する



41

ラグランジュの補間公式

- N+1点のデータを通るN次式を求め、この式で補間する
- 例) N=3の場合
 - 4点のデータを通る3次式を求めて補間する



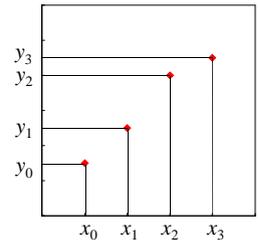
48

ラグランジュの補間公式

- N+1個の点を通るN次式を求める方法 (例 N=3)

以下の $P_N(x)$ の3次式を使う

$$P_N(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$



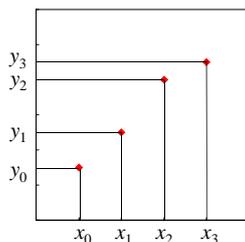
49

ラグランジュの補間公式

- N+1個の点を通るN次式を求める方法 (例 N=3)

$x=x_0$ のとき 部分は零
 部分は1

$$P_N(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3$$



50

ラグランジュの補間公式

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^N \frac{\omega_i(x)}{\omega_i(x_i)} y_i$$

ただし、

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_N)$$

$$\omega(x_i) = (x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_N)$$

$$\omega_i(x) = \frac{\omega(x)}{x-x_i}; \quad \omega(x)から(x-x_i)を除いたもの$$

$$\omega_i(x_i) = \frac{\omega(x_i)}{x_i-x_i}; \quad \omega(x_i)から(x_i-x_i)を除いたもの$$

54

ラグランジュの補間公式

演習問題4. 1を解く(Excelシートを使って教科書P52の(4. 6)式を計算する)

55

スプライン補間法

- ・ 混合スプライン
 - 連続した4点を1組にした補間公式を作成し、中央2点間のみを用いる。
 - データ点を必ず通る。
 - データ点にて、両側の区間の2階微分係数が一致する。
 - データは等間隔でなくてはならない。
- ・ ベーススプライン
 - データ点は等間隔。
 - データ点で、1階および2階微分が一致する。
 - 補間が連続的になるが、データ点を必ずしも通らない。
 - 連続した4点から3次式を求め、中央2点間を補間。
- ・ 雲形定規スプライン
 - データ点を必ず通る。
 - データ点にて、両側の区間の1階微分係数が一致する。

56

スプライン補間法

- 教科書の(4. 8)、(4. 9)、(4. 10)式を使い、演習問題4. 2を解く
- この場合、 x と y をともに上記の式から媒介変数 u の関数として求める。

57