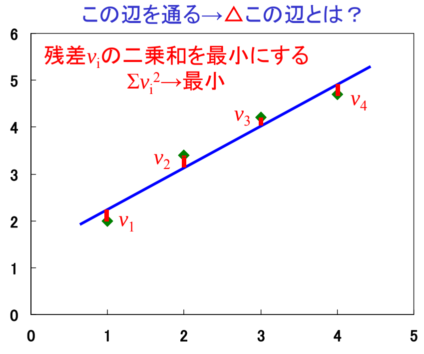
計測工学7

最小二乗法・基準方程式

復習：最小二乗法の考え方

この辺を通る→△この辺とは？



実験式を1次式で近似する

- 未知量の個数：m
- 測定回数：n（n>m）
- 測定値：M_i:M_1～M_n
- 未知量：x_i:x_1～x_m
- 1次方程式
  $ax_1+bx_2+\cdots+lx_m=M$

青色：実験で得られるデータ

赤色：最小二乗法で求める数値

- 例

未知量の数m=2

実験のパラメータはaのみ

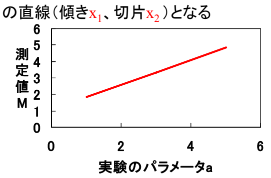
b=1

の場合

一次方程式は

$x_1a+x_2=M$

の直線（傾きx_1、切片x_2）となる



実験式を1次式で近似する
（1）測定方程式

a_i, b_i・・・, l_iは測定または設定されている

$a_1x_1+b_1x_2+\cdots+l_1x_m=M_1$

$a_2x_1+b_2x_2+\cdots+l_2x_m=M_2$

…………

$a_nx_1+b_nx_2+\cdots+l_nx_m=M_n$

m個の未知量に対して n個の方程式（n>m）

実際には、x_1～x_mの値を決定すると左辺と右辺は等しくなく、**残差**が残る

- 例

未知量の数m=2, b_iが全て1の場合

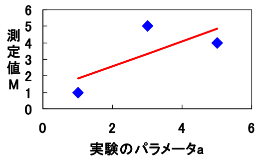
一次方程式は

$x_1a+x_2=M$

の直線（傾きx_1、切片x_2）となる

実験データの個数n=3（>m）の場合

直線と実験データは一致せず、**残差**が残る



実験式を1次式で近似する
（2）残差

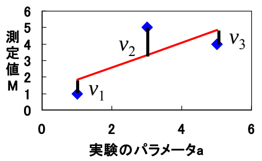
$\bar{x}_i$は未知量のもっとも信頼しうる値として

$$v_1 = M_1 - (a_1\bar{x}_1 + b_1\bar{x}_2 + \cdots + l_1\bar{x}_m)$$
$$v_2 = M_2 - (a_2\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + \cdots + l_2\bar{x}_m)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$v_n = M_n - (a_n\bar{x}_1 + b_n\bar{x}_2 + \cdots + l_n\bar{x}_m)$$

- 例

残差vは

$$\begin{cases} v_1 = M_1 - (a_1\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ v_2 = M_2 - (a_2\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \\ v_n = M_n - (a_n\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \end{cases}$$



実験式を1次式で近似する
（3）残差の二乗和

残差v_iの二乗和は

$$\sum v_i = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$$

1個のv_i^2についての$\bar{x}_1$に関する偏微分は

$$\frac{\partial v_i^2}{\partial \bar{x}_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_1}\{M_i - (a_i\bar{x}_1 + b_i\bar{x}_2 + \cdots + l_i\bar{x}_m)\}^2$$
$$= 2\{M_i - (a_i\bar{x}_1 + b_i\bar{x}_2 + \cdots + l_i\bar{x}_m)\}(-a_i)$$

である。従って残差viの二乗和の偏微分は

$$\frac{\partial v_1^2}{\partial \bar{x}_1} = 2\{M_1 - (a_1\bar{x}_1 + b_1\bar{x}_2 + \cdots + l_1\bar{x}_m)\}(-a_1)$$
$$\frac{\partial v_2^2}{\partial \bar{x}_1} = 2\{M_2 - (a_2\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + \cdots + l_2\bar{x}_m)\}(-a_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\boxed{\frac{\partial \sum v_i^2}{\partial \bar{x}_1} = 2\left\{-\sum a_iM_i + \bar{x}_1\sum a_i^2 + \bar{x}_2\sum a_ib_i + \cdots + \bar{x}_m\sum a_il_i\right\}}$$

実験式を1次式で近似する
(4)基準方程式

$$\frac{\partial \sum v_i^{\,2}}{\partial \bar{x}_1} = 2\left\{-\sum a_i M_i + \bar{x}_1 \sum a_i^{\,2} + \bar{x}_2 \sum a_i b_i + \cdots + \bar{x}_m \sum a_i l_i\right\} = 0$$

残差の二乗和の偏微分$=0$として

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sum a_i^{\,2}\right)\bar{x}_1 + \left(\sum a_i b_i\right)\bar{x}_2 + \cdots + \left(\sum a_i l_i\right)\bar{x}_m = \sum a_i M_i \\ \left(\sum a_i b_i\right)\bar{x}_1 + \left(\sum b_i^{\,2}\right)\bar{x}_2 + \cdots + \left(\sum b_i l_i\right)\bar{x}_m = \sum b_i M_i \\ \qquad\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\sum a_i l_i\right)\bar{x}_1 + \left(\sum b_i l_i\right)\bar{x}_2 + \cdots + \left(\sum l_i^{\,2}\right)\bar{x}_m = \sum l_i M_i \end{array}\right\}$$

測定方程式はm個の未知量に対してn個の式(n>m)があり、解はなかった(残差が残った)が、
基準方程式はm個の未知量に対してm個の式があり、式が解ける→この解が未知量のもっとも信頼し得る値

- 例

未知量の数m=2の場合
一次方程式は
$x_1 a + x_2 b = M$
基準方程式は

$$\left.\begin{array}{l}\left(\sum a_i^{\,2}\right)\bar{x}_1 + \left(\sum a_i b_i\right)\bar{x}_2 = \sum a_i M_i \\ \left(\sum a_i b_i\right)\bar{x}_1 + \left(\sum b_i^{\,2}\right)\bar{x}_2 = \sum b_i M_i \end{array}\right\}$$

※これは教科書の(3.17)式に対応

実験式を1次式で近似する
(5)確率誤差

確率誤差は

$$E = \pm 0.6475\sqrt{\frac{\sum v_i^{\,2}}{n-m}}$$

正規分布の章でやった確率誤差は未知量の数m=1の場合と考えることが出来る

Excel演習

- 配布したExcelシートの「P38　1次式の例」で黄色い部分を埋めていく
  - ① 基準方程式の係数を求める(表Aを埋める)(教科書の表3.２の値を写すのではなく、式を入力すること。また、Σには関数(=sum())を利用する)
  - ② 1次方程式の係数pとqを求める(表B)
  - ③ 求めたpとqからy=p+qxの値を求める(表C)
  - ④ y=p+qxのデータをグラフに追加する(グラフ部分で右クリックし「元のデータ」を選択。「系列」タブの中で、「追加」をクリックし、グラフに新たな系列を追加する)
  - ⑤ 残差の二乗の総和を求める(表C)
  - ⑥ 係数pを求めた値の-0.3～+0.3まで変化させて、それぞれの係数について残差の二乗の総和を求める(表D)
  - ⑦ 横軸をpの値、縦軸を残差の二乗の総和として、表Dのグラフを作成し、求めた係数pで二乗誤差が最小となっていることを確認する

Excel演習２

- 配布したExcelシートの演習を行う