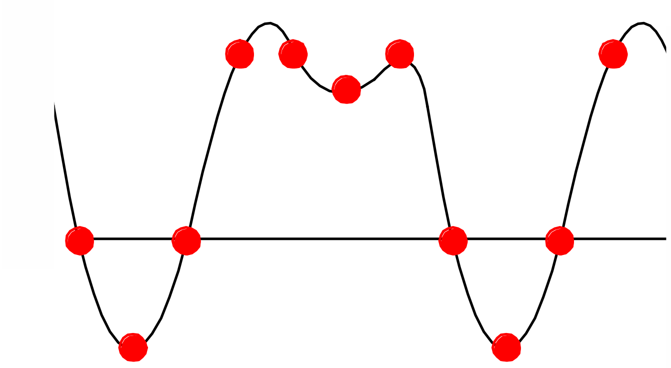
数値計算（8）

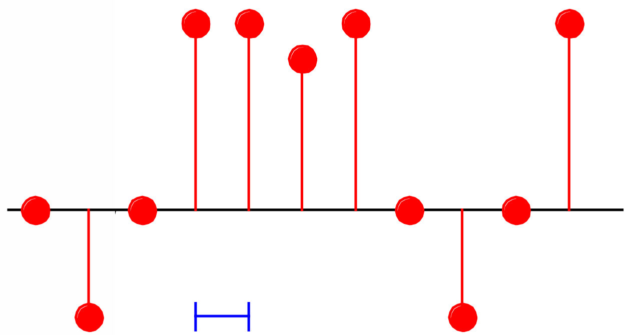
周波数解析

（離散フーリエ変換）

サンプリング（標本化）

連続的な信号 　数値計算 → 　離散的な信号





Δ サンプリング間隔

$x(t)$

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta)\delta(t - k\Delta)$$

フーリエ級数

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$$ 三角関数の積み重ね

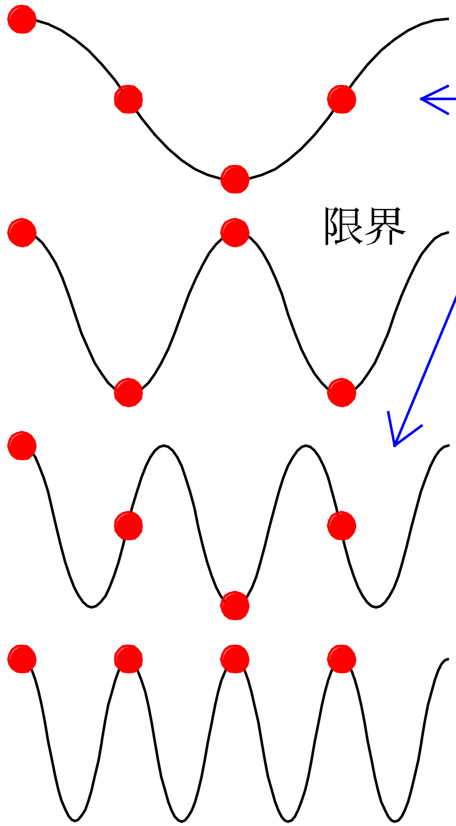
三角関数のサンプリング　$\cos\dfrac{2\pi nt}{T}$

$n=1$

$n=2$

$n=3$

$n=4$



限界

区別できない

最大周期 $T_{\max} \geq 2\Delta$

最大周波数 $f_{\max} \leq \dfrac{1}{2\Delta}$

ナイキスト周波数

$2f_{\max} \leq \dfrac{1}{\Delta}$ (サンプリング周波数)

サンプリング定理

原信号に含まれる最大周波数の2倍以上の周波数でサンプリングすれば，原信号を一意に復元できる

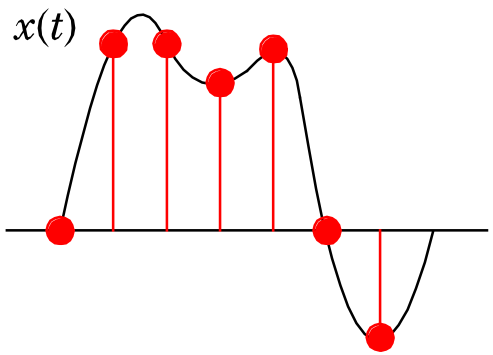
フーリエ変換

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

フーリエ逆変換

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

サンプリング信号のフーリエ変換



サンプリング間隔 Δ

サンプリング点数 N

$$x^*(t) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\delta(t - p\Delta)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\delta(t - p\Delta)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\delta(t - p\Delta)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} x(p\Delta)\delta(t - p\Delta)e^{-j2\pi ft}\,dt$$

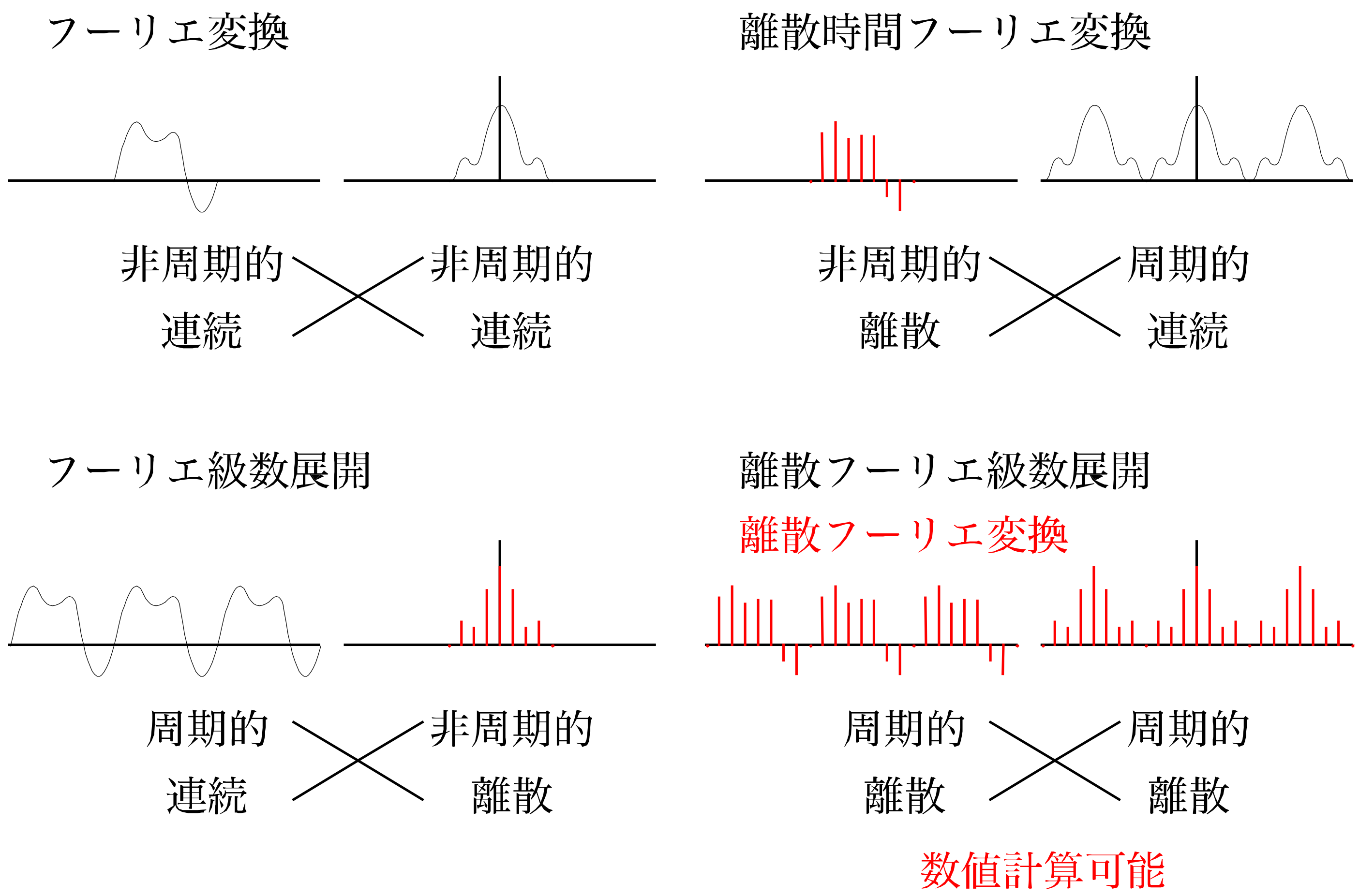
$$= \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi ft}\delta(t - p\Delta)\,dt$$

$\int g(t)\delta(t-a)dt = g(a)$ より

$$= \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\, e^{-j2\pi fp\Delta}$$

$e^{-j2\pi fp\Delta}$ は f に関して，周期 $\dfrac{1}{p\Delta}$ の連続関数

計算機での数値計算は不可能



フーリエ変換
非周期的
連続
非周期的
連続
離散時間フーリエ変換
非周期的
離散
周期的
連続
フーリエ級数展開
周期的
連続
非周期的
離散
離散フーリエ級数展開
離散フーリエ変換
周期的
離散
周期的
離散
数値計算可能

離散フーリエ変換

離散フーリエ級数展開

時間領域，周波数領域ともに周期的

フーリエ級数展開

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, e^{j2\pi kt/T} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt \qquad T : \text{周期} \ (= N\Delta)$$

サンプリング信号

$$x^*(t) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\delta(t - p\Delta)$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\delta(t - p\Delta) \, e^{-j2\pi kt/T} \, dt$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\int_0^T e^{-j2\pi kt/T}\delta(t - p\Delta) \, dt$$

$\int g(t)\delta(t - a)dt = g(a)$ より

$$= \frac{1}{T}\sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta) \, e^{-j2\pi pk\Delta/T}$$

$$c_k = \frac{1}{N\Delta} \sum_{p=0}^{N-1} x(p\Delta)\, e^{-j2\pi pk\Delta/N\Delta}$$

サンプル値系列を $x_p = x(p\Delta)$ $(\mathrm{p} = 0, \cdots, N-1)$ とし,

添字のみで考えれば $(\Delta = 1)$,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x_p\, e^{-j2\pi pk/N} \qquad \text{周期 } N$$

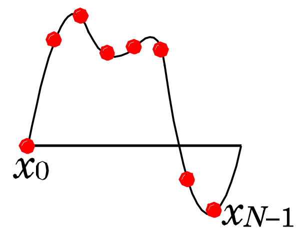
$$X_k = \sum_{p=0}^{N-1} x_p\, e^{-j2\pi pk/N}$$

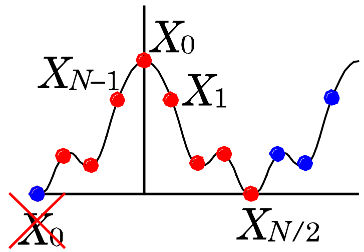
逆変換も $X_0 \sim X_{N-1}$ で考えて

$$x_p = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{N} e^{j2\pi pk/N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{j2\pi pk/N}$$

$X_0 \sim X_{N-1}$?





$X_{-k} = X_{N-k}$

回転因子

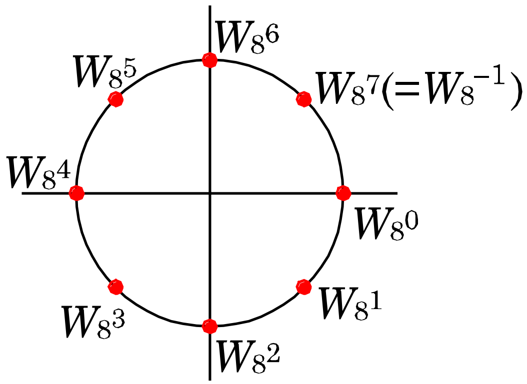
離散フーリエ変換

$$X_k = \sum_{p=0}^{N-1} x_p\, e^{-j2\pi pk/N} \qquad x_p = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{j2\pi pk/N}$$

$W_N = e^{-j2\pi/N}$ （$W_N = \cos(2\pi/N) - j\sin(2\pi/N)$）と置くと

$$X_k = \sum_{p=0}^{N-1} x_p\, W_N^{pk} \qquad x_p = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\, W_N^{-pk}$$

$W_N^0, W_N^1, W_N^2, \cdots, W_N^{N-1}$ は，複素平面上で単位円の N 等分点



$$W_N^m = W_N^{m+N}$$

W_N^mをかけると，
複素平面上で
$-2\pi m/N$ 回転

行列表現

$N = 4$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_4{}^0 & W_4{}^0 & W_4{}^0 & W_4{}^0 \\ W_4{}^0 & W_4{}^1 & W_4{}^2 & W_4{}^3 \\ W_4{}^0 & W_4{}^2 & W_4{}^0 & W_4{}^2 \\ W_4{}^0 & W_4{}^3 & W_4{}^2 & W_4{}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

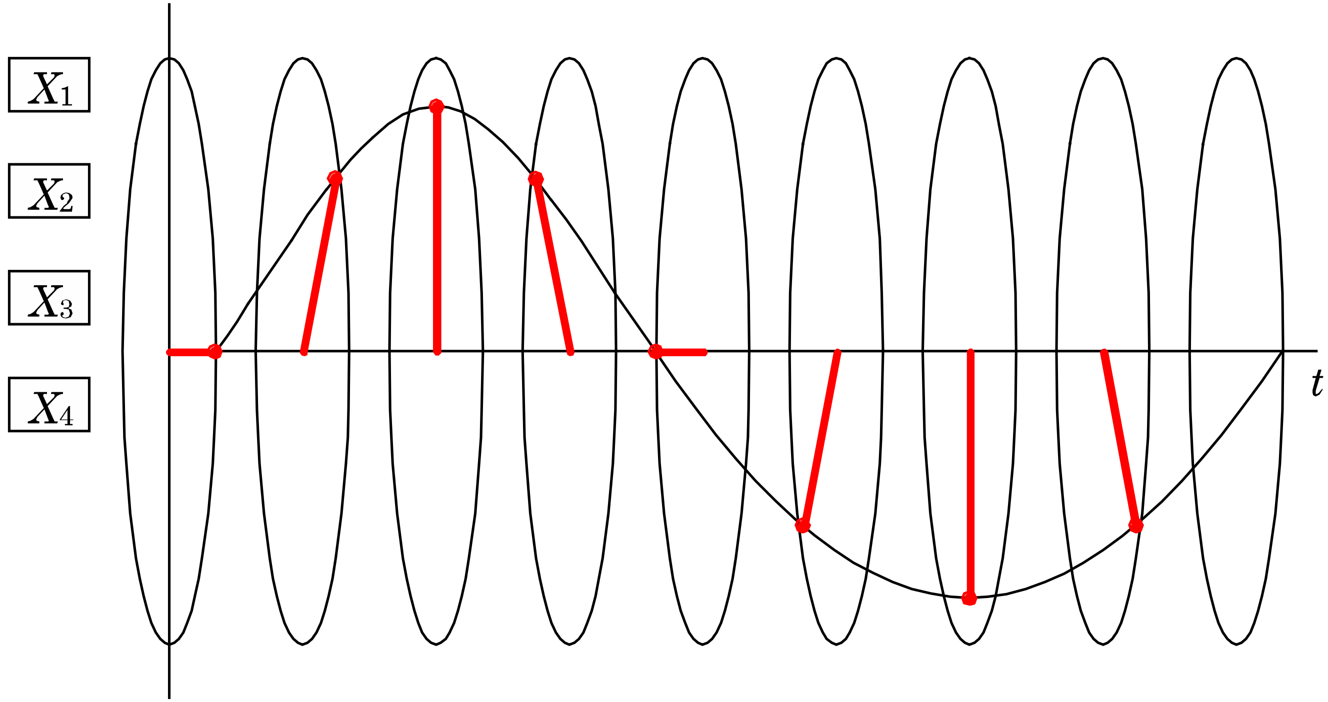
$N = 8$

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_8{}^0 & W_8{}^0 & W_8{}^0 & W_8{}^0 & W_8{}^0 & W_8{}^0 & W_8{}^0 & W_8{}^0 \\ W_8{}^0 & W_8{}^1 & W_8{}^2 & W_8{}^3 & W_8{}^4 & W_8{}^5 & W_8{}^6 & W_8{}^7 \\ W_8{}^0 & W_8{}^2 & W_8{}^4 & W_8{}^6 & W_8{}^0 & W_8{}^2 & W_8{}^4 & W_8{}^6 \\ W_8{}^0 & W_8{}^3 & W_8{}^6 & W_8{}^1 & W_8{}^4 & W_8{}^7 & W_8{}^2 & W_8{}^5 \\ W_8{}^0 & W_8{}^4 & W_8{}^0 & W_8{}^4 & W_8{}^0 & W_8{}^4 & W_8{}^0 & W_8{}^4 \\ W_8{}^0 & W_8{}^5 & W_8{}^2 & W_8{}^7 & W_8{}^4 & W_8{}^1 & W_8{}^6 & W_8{}^3 \\ W_8{}^0 & W_8{}^6 & W_8{}^4 & W_8{}^2 & W_8{}^0 & W_8{}^6 & W_8{}^4 & W_8{}^2 \\ W_8{}^0 & W_8{}^7 & W_8{}^6 & W_8{}^5 & W_8{}^4 & W_8{}^3 & W_8{}^2 & W_8{}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix}$$

パワースペクトル

$$X_{PS}(k) = |X_k| = \sqrt{Re(X_k)^2 + Im(X_k)^2}$$

周期を検出するしくみ



数値計算　　サンプリング間隔 = 0.5秒

x	0	1	2	3
y	1	1	−1	−1

$\Delta = 0.5$ [s]

$1/\Delta = 2$ [Hz]

N = 4

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1-1-1 \\ 1-j+1-j \\ 1-1-1+1 \\ 1+j+1+j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-j2 \\ 0 \\ 2+j2 \end{pmatrix}$$

X_k 周波数[Hz]	X_3 −2	X_0 0	X_1 2	X_2 4
$Re(X_k)$	2	0	2	0
$Im(X_k)$	2	0	−2	0

$$x_p = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_k\, e^{j2\pi pk/N}$$

観測波形 $\dfrac{1}{4}(4\cos(4\pi t)+4\sin(4\pi t)) = \cos(4\pi t)+\sin(4\pi t))$