# 数値計算（6）

ラグランジュの補間法

ニュートンの補間法

# ラグランジュの補間法

関数 $f(x)$ 上の $n$+1 点を通る $n$ 次の多項式 $P_n(x)$

2点 (1, 5), (3, 9) を通る 1 次式

$y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$

$5 = \mathrm{a}\cdot 1 + \mathrm{b}$ ・・・①

$9 = \mathrm{a}\cdot 3 + \mathrm{b}$ ・・・②

② − ①

$4 = 2\mathrm{a}$

$\mathrm{a} = 2$

$\mathrm{b} = 5 - 2\cdot 1 = 3$

$y = 2x + 3$

2点 $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ を通る 1 次式

$y = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$

$y_0 = \mathrm{a}x_0 + \mathrm{b}$ ・・・①

$y_1 = \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}$ ・・・②

② − ①

$y_1 - y_0 = \mathrm{a}(x_0 - x_1)$

$$\mathrm{a} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$\mathrm{b} = y_1 - \mathrm{a}x_1 = y_1 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_1 = \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0}$$

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x + \frac{x_1 y_0 - x_0 y_1}{x_1 - x_0} \quad = \frac{(x - x_0)y_1 - (x - x_1)y_0}{x_1 - x_0}$$

ここで,　$L_0(x) = \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1}$ ,　$L_1(x) = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$　とおくと,

$$y = L_0(x)\, y_0 + L_1(x)\, y_1$$

このとき,　$L_0(x_0) = 1$ ,　$L_1(x_0) = 0$

$L_0(x_1) = 0$ ,　$L_1(x_1) = 1$

一般に $n$+1 点のとき,

$$L_i(x_i) = 1 \quad (0 \leqq i \leqq n)$$

$$L_i(x_j) = 0 \quad (i \neq j,\ 0 \leqq i, j \leqq n)$$

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x_i)\, y_i$ とすると,$(x_i, y_i)$ を通る曲線の式

$L_i(x_j) = 0 \quad (i \neq j,\ 0 \leqq i, j \leqq n)$ となるためには分子は

$$(x - x_0)(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)$$

$L_i(x_i) = 1 \quad (0 \leqq i \leqq n)$ となるためには $x = x_i$ のとき分母は分子と同じ

$$(x_i - x_0)(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)$$

よって,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$ を通る曲線の式 $P_n(x)$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i\,, \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

3点 $(-1, -1), (1, 1), (2, 5)$ を通る2次関数 $y = ax^2 + bx + c$

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{((-1)-1)((-1)-2)} = \frac{x^2-3x+2}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-(-1))(x-2)}{(1-(-1))(1-2)} = -\frac{x^2-x-2}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-(-1))(x-1)}{(2-(-1))(2-1)} = \frac{x^2-1}{3}$$

$$P_2(x) = \frac{x^2-3x+2}{6}\cdot(-1) - \frac{x^2-x-2}{2}\cdot 1 + \frac{x^2-1}{3}\cdot 5$$
$$= x^2 - x - 1$$

点が 1 つ増えると，係数を計算し直し

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\left( y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x - x_j) \right)$$

数値計算：3点 (−1, −1), (1, 1), (2, 5) を通る $f(0)$

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$L_0(0) = \frac{(0-1)(0-2)}{((-1)-1)((-1)-2)} = \frac{2}{6} = 0.33$$

$$L_1(0) = \frac{(0-(-1))(0-2)}{(1-(-1))(1-2)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$L_2(0) = \frac{(0-(-1))(0-1)}{(2-(-1))(2-1)} = \frac{-1}{3} = -0.33$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x_i)\, y_i$$

$$P_2(x) = 0.33\cdot(-1) + 1\cdot 1 + (-0.33)\cdot 5$$

$$= -0.98$$

（解析解は $f(0) = -1$）

# ニュートンの補間公式

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n \prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$$

$x = x_0$ とおくと，　$a_0 = P_n(x_0) = y_0$

$x = x_1$ とおくと，　$a_0 + a_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = y_1,\quad a_1 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

$x = x_1$ とおくと，　$a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = P_n(x_2) = y_2$

$$a_2 = \frac{y_2 - y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{\overset{-\,y_1(x_1 - x_1)}{y_2(x_1 - x_0) - y_1(x_2 - x_0) + y_0(x_2 - x_1)}}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{(y_2 - y_1)(x_1 - x_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_1 - x_0)} = \frac{\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

## $n$ 階差分商

$$f[x_0] = y_0,\ \ f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}\ ,\ \ f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$f[x_n, \cdots, x_1, x_0] = \frac{f[x_n, \cdots, x_1] - f[x_{n-1}, \cdots, x_0]}{x_n - x_0}$$

$$P_0(x) = f[x_0]$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_n, \cdots, x_1, x_0] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

## $n$ 階差分商の計算

| $x$ | $y$ | $f[x_0]$ | $f[x_1, x_0]$ | $f[x_2, x_1, x_0]$ | $f[x_3, x_2, x_1, x_0]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | |
| | | 1 | | | |
| 1 | 2 | | −1 | | |
| | | −1 | | 0.33 | |
| 2 | 1 | | 0 | | 0.08 |
| | | −1 | | 0.67 | |
| 3 | 0 | | 2 | | |
| | | 3 | | | |
| 4 | 3 | | | | |

係数

## ニュートンの補間公式による計算

$$P_0(x) = f[x_0], \quad P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_n, \cdots, x_1, x_0] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

| $x$ | $y$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $-1$ | $-1$ | | | |
| | | $1$ | | |
| $1$ | $1$ | | $1$ | |
| | | $4$ | | $-1$ |
| $2$ | $5$ | | $-4$ | |
| | | $-8$ | | |
| $4$ | $-11$ | | | |

$(-1, -1)$を通る0次関数

$$P_0(x) = -1$$

$(1, 1)$ を通る1次関数

$$P_1(x) = -1 + 1(x - (-1)) = x$$

$(2, 5)$ を通る2次関数

$$P_2(x) = x + 1(x - (-1))(x - 1) = x^2 + x - 1$$

$(4, -11)$ を通る3次関数

$$P_3(x) = x^2 + x - 1 - 1(x - (-1))(x - 1)(x - 2)$$

$$= -x^3 + 3x^2 + 2x - 3$$

数値計算：3点 (−1, −1), (1, 1), (2, 5) を通る $f(0)$

$$P_0(x) = f[x_0],\quad P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_n, \cdots, x_1, x_0]\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$$

| $x$ | $y$ | | |
|---|---|---|---|
| −1 | −1 | | |
| | | 1 | |
| 1 | 1 | | 1 |
| | | 4 | |
| 2 | 5 | | |

$P_0(0) = -1$

$P_1(0) = -1 + 1\cdot(0 - (-1)) = 0$

$P_2(0) = 0 + 1\cdot(0 - (-1))(0 - 1) = -1$

標本点（分点）$\{x_n\}$ が等間隔 $h$ の場合

$$x_k = x_0 + kh$$

$$f[x_1, x_0] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h}$$

$$\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta f(x_1)}{h} - \dfrac{\Delta f(x_0)}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}$$

$$\Delta^2 f(x_i) = \Delta f(x_{i+1}) - \Delta f(x_i)$$

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_3, x_2, x_1] - f[x_2, x_1, x_0]}{x_3 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{\Delta^2 f(x_1)}{2h^2} - \dfrac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}}{3h} = \frac{\Delta^3 f(x_0)}{2 \cdot 3h^3}$$

$$\Delta^0 f(x_i) = f(x_i)$$

$$\Delta^m f(x_i) = \Delta^{m-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{m-1} f(x_i)$$

$$f[x_k, \ldots, x_0] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\, h^k}$$

ニュートンの補間公式の $k$ 次の項は

$$f[x_k, \cdots, x_1, x_0] \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

$x = x_0 + \alpha h$ (α ：0以上の実数)とおくと

$$\prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i) = \prod_{i=0}^{k-1}((x_0 + \alpha h) - (x_0 + ih)) = \prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)h = h^k \prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)$$

したがって,

$$f[x_k, \cdots, x_1, x_0] \prod_{i=0}^{k-1}(x - x_i)$$

$$= \frac{\Delta^k f(x_0)}{k!\, h^k}\, h^k \prod_{i=0}^{k-1}(\alpha - i)$$

$$= \binom{\alpha}{k} \Delta^k f(x_0)$$

二項係数の拡張

実数 $\alpha$, 自然数 n に対し

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

## ニュートンの前進公式

$$P_n(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{\alpha}{i} \Delta^i f(x_0)$$

| $x$ | $f$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | −5 | | | |
| | | 6 | | |
| 1 | 1 | | 2 | |
| | | 8 | | 6 |
| 2 | 9 | | 8 | |
| | | 16 | | |
| 3 | 25 | | | |

$P_3(0.5) = P_n(0 + 0.5 \cdot 1)$

$= (-5) + 0.5 \cdot 6/1! + 0.5(0.5-1)2/2!$

$\quad + 0.5(0.5-1)(0.5-2)6/3!$

$= -5 + 3.0 - 0.25 + 0.375$

$= -2.125$

## ニュートンの後退公式

$$P_n(x_n + \alpha h) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{-\alpha}{i} \nabla^i f(x_n)$$

$$\nabla^0 f(x_i) = f(x_i)$$

$$\nabla^m f(x_i) = \nabla^{m-1} f(x_i) - \nabla^{m-1} f(x_{i-1})$$

$P_3(2.5) = P_n(3 + (-0.5) \cdot 1)$

$= 25 - 0.5 \cdot 16/1! + 0.5(0.5-1)8/2!$

$\quad - 0.5(0.5-1)(0.5-2)6/3!$

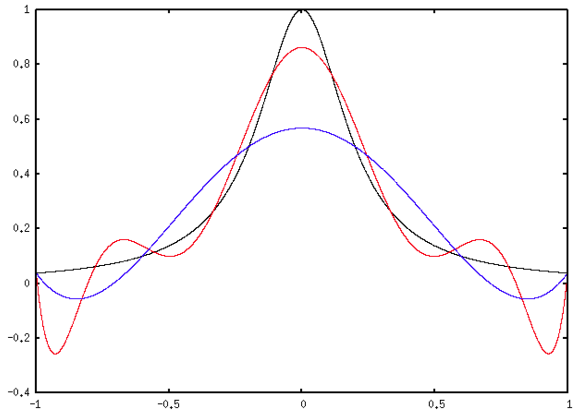
$= 25 - 8.0 - 1.0 - 0.375$

$= 15.625$

# ルンゲの現象

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2} \qquad (-1 \le x \le 1)$$

上の $n + 1$ 点を使って補間




$n = 5$ のとき

$n = 7$ のとき　（ $f(x)$にほぼ一致）

$n = 9$ のとき

$f(x)$ の変化が急激な場合、多数の標本点$\{x_n\}$を等間隔にとると

補間多項式は激しく振動することがある