

# 方形波を用いたひずみ波交流の学習

(岐阜工業高等専門学校)

所 哲 郎

## 1. はじめに

電気工学科・電子工学科を主とする電気系の学科はもちろん、電子制御や機械系の学科でも、電気工学の基礎科目として交流理論を学習することは必須とされている。特に高専の電気系の学科では2年次など、低学年からの「くさび形教育」の一環として電気回路を学習することが多い。この場合、微積分を数学で学習するのよりもやや早く、交流の平均値や実効値を学習することとなる。たとえば電気学会の「交流理論」でも、第1章で正弦波の平均値や実効値について述べている<sup>1)</sup>。これに対して方形波の平均値や実効値は、積分の学習を待つまでもなく、図的にその値の求め方を理解しやすい。また、同じく第1章では、この正弦波交流に対して、周期Tをもち、正弦波でない全ての波形をひずみ波交流または非正弦波交流といい、正弦波を合成することにより、任意のひずみ波が形成されることを述べている。そして、三角波や方形波などの、ひずみ波の平均値や実効値についても述べているが、低学年ではややハードルが高いと感じる学生が多い。

一方、高度情報化社会の基礎となるスペクトルでひずみ波波形をとらえることの大切さは、電気系の学生のみならず、機械系など全ての工学を学習する学生の必須である。フーリエ級数展開を含めたひずみ波交流の学習は、同教科書では第7章にあるなど、一通り交流理論を学習した後にこの方形波などを例として述べている。<sup>1) - 3)</sup>

本論文ではコンピュータなどのデジタル機器との橋渡しとして、感覚的にも理解しやすい方形波を用いた、ひずみ波交流の学習について、数学の学習進度に依らず、できるだけ図的に理解可能な学習方法を提案する。また、数学的な素養が確立された後に学ぶと考えられる電気系以外の学生に対しても、スペクトルを用いたひずみ波交流の学習の有用性を示唆できるよう努める。また、最近のマルチメディア学習環境の充実も考慮して、同環境での実習を取り入れた、ひずみ波交流の学習方法についても提案する。<sup>4) - 6)</sup>

## 2. 方形波を用いたひずみ波交流の学習

### 2.1 正弦波の合成と波形伝送

周期Tの正弦波交流とその高調波成分を合成することにより、周期Tの任意のひずみ波を形成することができる。このことを本論文では、正弦波を合成していくことにより、代表的なひずみ波である方形波が形成されることにより学習させる。

まず、式(1)に示される、大きさが周期に反比例して小さくなる奇数高調波成分正弦波の合成波形を $n=7$ について求めさせる。この答は後述する問題1のようにEXCEL等の表計算ソフトなどにより求めさせると良い。その一例として、基本波の振幅を1とした、 $n$ が7の場合について図1に示す。 $n$ が大きくなるにつれてだんだん方形波に近づいていく。また、 $n$ を大きくしていくと、正及び負の立ち上がり部分にパルス状のピークが現れ、ギブスの現象が確認できる(問題1)。

次に、図2と図3は、波形に含まれる各周波数成分の大きさを表すスペクトルは、基本波が1で第3高調波が $1/3$ であり、同じである。両波形を印加電圧波形とすると、後で述べるように、その実行値や負荷で消費される電力は等しい。従って、ひずみ波を音やエネルギーとして捉える場合と、その形としての波形伝送を考える場合とでは取り

$$y(t) = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t) \quad (1)$$

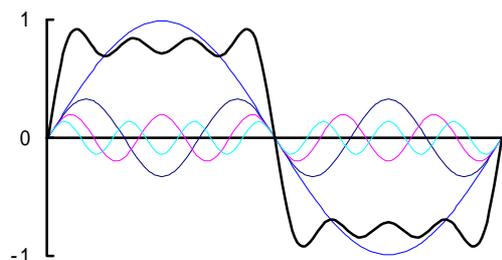


図1 第7高調波までの正弦波による方形波の合成

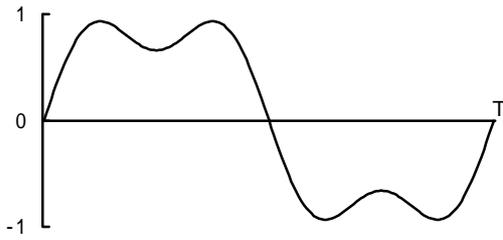


図2  $\sin t + (\sin 3t)/3$

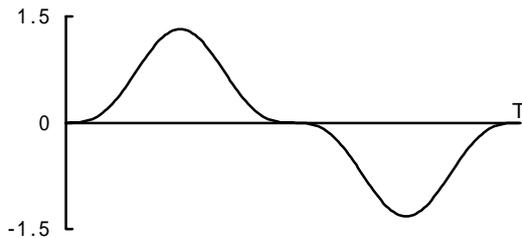


図3  $\sin t - (\sin 3t)/3$

扱いが異なることを注意させる。前者はひずみ波の各高調波成分の大きさのみが、後者では大きさに加えて各高調波成分の位相が関係することを理解させる。(1) - (3))

## 2.2 方形波のフーリエ級数展開

異なる周波数の正弦波を重ね合わせた波形をひずみ波ということ述べた後、周期 T の任意の周期波は逆に、この周期 T の基本波正弦波とその高調波である正弦波の合成からなることを説明する。この、各々の基本波及び高調波成分の大きさと位相をフーリエ係数と言い、ひずみ波をこの基本波と高調波成分からなるフーリエ級数に分解することをフーリエ展開ということをする。

例えば、振幅 1、周期 T の正弦波は基本波成分のみであり、振幅 1、周期 T の方形波は高調波成分を含むひずみ波である。この方形波をフーリエ展開すると、式(2)となる。

$$y(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \\ = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin((2n-1)\omega t) \quad (2)$$

これらのフーリエ係数は、次式のように、y(t) の 1 周期分の波形と各周波数の正弦高調波とのかけ算の積分操作によって、その基本波の 1 周期 T に対する平均値として求めることができる。

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(n\omega t) dt \quad (3)$$

ここで、 $b_n$  は正弦成分であり、波形によっては他に  $a_n$  として、フーリエ級数の余弦成分もあることを説明しておく。

さて、第 n 高調波のフーリエ係数の正弦成分を求める式(3)を詳しく見ると、y(t) と第 n 正弦高調波をかけたものの、基本波一周分分の平均値を求め、2 倍したものである。この 2 倍する理由を、y(t) が振幅 1 の基本波正弦波  $\sin t$  のみの場合について説明する。フーリエ展開の考え方から、この場合のフーリエ係数は、正弦成分の  $b_1=1$  となるが、式(3)において、 $\sin^2 t$  の平均値を求めると、その値は 1/2 となることを、後述する式(5)や図を用いて説明する。従って、フーリエ級数を求めるには式(3)の様に、y(t) と正弦高調波をかけたものの周期 T の間の平均値を求めて 2 倍する必要があることを理解させる。

## 2.3 方形波のフーリエ展開の図的解法

振幅 1、周期 T の方形波をフーリエ級数に、図を用いて展開する。まず、原点に対して点対称であり、余弦成分はない。また、90 度(T/4)に対しても対称であるため、奇数高調波成分のみとなる。式(3)より、0 から T/2 と T/2 から T は対象であるため、半周期の積分結果を 2 倍すればよい。従って、

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_{2n} = 0 \\ b_{2n-1} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin((2n-1)\omega t) dt \\ = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin((2n-1)\omega t) dt \quad (4)$$

であり、正弦波の奇数高調波成分のみが存在することとなる。y(t) は方形波であり 0 から T/2 にてその大きさは 1 である。従って、n=1 の基本波の場合には、正弦波の平均値の 2 倍を求めることになる。ここで、正弦波の半周期の平均値は  $2/\pi$  である(2.4 参照)。従って、振幅 1 の方形波の、基本波正弦波の振幅は、この 2 倍の  $4/\pi$  となる。

第 3 高調波の場合には、方形波の半周期に第 3 高調波の正弦波は 1.5 波形含まれるが、正の半波形と負の半波形は積分で相殺されるので、結局、正の半波形のみが残り、当然その面積は基本波の 1/3 となる。従って、上式の積分値は基本波の場合の 1/3 となる。同様に、第(2n-1)高調波の場合にはその  $1/(2n-1)$  となる。

一般に方形波の振幅が A の場合は線形性により、それぞれの高調波成分の振幅を A 倍とすればよい。よって、式(2)またはその A 倍が振幅 1 または振幅 A の方形波のフーリエ展開式となる。

## 2.4 方形波の平均値と実効値

まず、正弦波の平均値について説明する。積分を学習していない場合は、振幅1の正弦波半周期の面積は2であると覚えさせる。

$y(\theta) = \sin \theta$  の半周期の面積は、

$$\int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2 \quad (5)$$

であるため、その0から $\pi$ までの平均が $2/\pi$ となり、これが正弦波の平均値である。一周期に対して積分すると、後ろ半周期の面積が $-2$ であるため0となってしまうので、正弦波では便宜上、半周期の平均値(または絶対値の平均値)を、その平均値としていることに注意させる。

さて、交流電圧や電流の実効値EおよびIは、一周期にわたる各瞬時値の2乗の平均の平方根であり、瞬時値をそれぞれe, iとする場合、次のように表された。

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}, \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (6)$$

この瞬時値として式(2)に示したような各高調波成分の和からなるひずみ波を考える場合、周波数の異なる正弦波の積の基本波一周期にわたる平均は必ず0となることから、周波数の等しい各高調波成分の2乗の平均のみが平方根の中に残り、式(7)の様になる。

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_n + \dots)^2 dt} \\ &= \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_n^2 + \dots} \\ I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2 + \dots} \quad (7) \end{aligned}$$

従って、直流分と基本波及び各高調波成分の実効値の2乗の合計の平方根が、ひずみ波の実効値となることをまず説明する。電流も同様である。

次に、波高値1の方形波の平均値を求める。方形波の平均値は振幅が1で一定なので、波高値と同じ1である。これを方形波のフーリエ級数による展開式から求めると、まず、基本波に関しては振幅が $4/\pi$ で、その振幅が1の時の平均が $2/\pi$ であるため、 $(4/\pi) \times (2/\pi) = 8/\pi^2$ となる。次に第3高調波に関しては、高さである振幅は基本波の $1/3$ 、方形波半周期あたりの面積は横幅も基本波の $1/3$

(なぜならば、基本波半周期当たり第3高調波の半波3このうち、一周期分は+と-で打ち消しあうため)と考えられるため、 $1/3 \times 1/3 = 1/3^2$ となる。従って、一般に第 $(2n-1)$ 高調波の平均(面積)は、振幅、幅とも $1/(2n-1)$ となるため、その平均値は $1/(2n-1)^2$ となる。ここで、

$$\left( 1^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{8} \quad (8)$$

であることより、方形波をスペクトルに分解したときの平均値は、 $(8/\pi^2) \times (\pi^2/8) = 1$ となる。

次に、波高値1の方形波の実効値を求める。方形波の実効値は、ひずみ波交流の実効値の式より、

$$\begin{aligned} E &= \frac{4}{\pi} \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \dots + E_{2n-1}^2 + \dots} \\ &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right)} \\ &= \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{8}} \\ &= 1 \quad (9) \end{aligned}$$

となり、当たり前であるが1である。なお、 $E_1$ は振幅1の基本波の実効値であり、ルートの中で2乗しているのので $1/2$ を全ての高調波の波高値の2乗から取り出している。

## 2.5 方形波の電力

電圧波形、電流波形共にひずみ波である場合の電力は、瞬時値eとiの積の一周期Tの間の平均値であるので、周波数の異なる電圧電流間の平均電力は0であり、電圧電流の各高調波成分の同次の高調波の間の電力を求め、加えればよい(重ね合わせの理)従って、ひずみ波の平均電力Pは、

$$P = E_0 I_0 + E_1 I_1 \cos \theta_1 + E_2 I_2 \cos \theta_2 + \dots + E_n I_n \cos \theta_n + \dots \quad (10)$$

となる。ここで、 $\theta_n$ は第n高調波電圧と電流の間の位相差である。このことは、抵抗 $1\Omega$ に振幅1Vの方形波を印加したときの電流が式(2)となり、式(10)により、式(2)の各高調波の2乗の和が1となることから理解できる。なお、正弦波の皮相電力に対応して、ひずみ波の実効電圧と実効電流の積を、ひずみ波の皮相電力、その有効(平均)電力Pとの比を実効力率ということを紹介すると良い。また、このひずみ波の実効電圧と実効電流に上記の実効力率の位相差が有るとするものを、

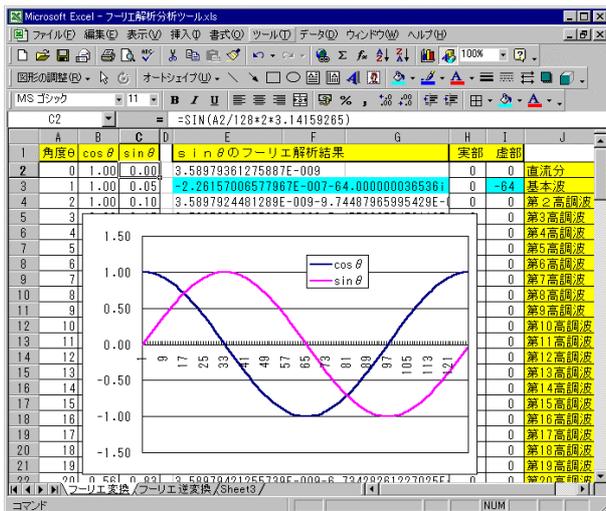


図4 EXCELによるフーリエ解析の一例

ひずみ波の等価正弦波としての取り扱いということも紹介すると良い。

## 2.6 マルチメディア環境での学習

2の偶数乗個のデータに関して、EXCELの「ツールメニュー」の「分析ツール」にある「フーリエ解析」を用いて複素フーリエ解析を行うことができる。メニューに出てこない場合は追加インストールする必要がある。

図4は128個のデータに対して、余弦波と正弦波を作製し、グラフとしたものである。次に、正弦波のデータに対して、フーリエ解析を行うとE列となる。複素数は「実部 + 虚部 i」の形式の文字形データで出力されている。実部のみ、虚部のみを数値として取り出すには IMREAL 関数と IMAGINARY 関数を用いる。虚部の2つ目のデータが-64となっており、正弦波の振幅・1×128点の半分の値となっている。また、128番目のデータは64となっている。

ところで、図4の正弦波はフーリエ逆変換を行っても得ることができる。この場合、基本波成分を0-128iとして、他のスペクトルデータは全て0としてEXCELの「分析ツール」の「フーリエ解析」の逆変換を用いる。この場合、基本波正弦波のデータを2番目と128番目に半分ずつにするのではなく、一つにまとめている。128点のデータでは、スペクトルは直流分から第63高調波までの複素スペクトルを計算することができることも理解できる。(標準化定理)

## 2.7 方形波を用いた問題の例

問題1 EXCEL等の表計算ソフトにより第63高調波までの方形波を作成し、ギブスの現象を確かめよ。

- 問題2 方形波を積分すると三角波となる。このフーリエ級数を求めよ。
- 問題3 問題2を各高調波スペクトルを積分した場合と比較せよ。
- 問題4 EXCEL等の表計算ソフトにより第7高調波までの三角波をグラフ化せよ。
- 問題5 任意の高調波までの方形波と三角波をEXCELの分析ツールのフーリエ解析を用いて、フーリエ逆変換により求めよ。
- 問題6  $y=|x|$ で表される三角波のフーリエ級数を求め、余弦成分  $a_n \cos(n t)$ が  $t=0$ にて  $a_n$ となることを用いて、式(8)を証明せよ。
- 問題7 幅、振幅E、周期Tのパルス列の複素フーリエ級数  $C_n$ を求めよ。(標準化関数)

## 3. おわりに

方形波という、代表的なひずみ波ではあるが、波高値・平均値・実効値などが図的にも求めやすい波形を題材に、ひずみ波交流の平均値や実効値、電力やフーリエスペクトルなど、電気回路で学ぶ最重要項目を体系立てて学ぶ方法を提案した。

EXCELなどの表計算ソフトを用いて、正弦波を合成したり、複素フーリエ解析を実習することはマルチメディア環境の充実した今、各高専の電気系実験・実習のテーマとしても、また、座学の内容を実学として理解する上でも、大いに役立つと思われる。本論文を参考に、全国高専の学生のひずみ波交流に関する理解が少しでも深まれば幸いである。

## 参考文献

- 1) 小郷 寛、「交流理論」、電気学会、1, 7章
- 2) 佐治 學、「電気回路A」、オーム社、12章
- 3) 小郷 寛、「回路網理論」、電気学会、1章
- 4) 佐藤敏行：CD-ROMを用いた一斉授業型および自主学習型マルチメディア教材の開発と実践、高専教育, vol.23, pp.165-170 (2000)
- 5) 阿蘇, 山畑, 泉, 福本：表計算ソフトによる課題学習(2) - 数値計算・視覚化による解析学教育 -, 高専教育, vol.23, pp.207-211 (2000)
- 6) 佐藤敏行：三角関数の指導におけるマルチメディア教材の開発と実践, 高専教育, vol.24, pp.181-186 (2001)