

# 方形波を用いたひずみ波交流の学習

所 哲 郎  
(岐阜工業高等専門学校)

## A Study of Distorted Waves Using Rectangular Wave Function

Tetsuro Tokoro  
(Gifu National College of Technology)

A study of Electric Circuit or Circuit Theory is one of the most important subjects for a basic study of the students in Electrical and Electronic Engineering courses. A sinusoidal wave is typically used to study the instantaneous, maximum, mean and effective values of the AC waveforms. However, it is difficult to understand the mean and effective values before studying the integration of the functions in mathematics. The mean and effective values of a rectangular wave function are easy to understand, schematically. The Fourier series expansion of distorted wave is also the most important chapter in Electric Circuits or Circuit theory for higher grades of students. Usually, many equations are also used to study the chapter. In this paper, a schematic learning method of the chapter is proposed with using the rectangular wave. The mean and effective values of the rectangular wave are also calculated by using its Fourier series. Using spreadsheet and some exercises, a multimedia study method of the distorted waves is also presented.

KEYWORDS : electric circuits, rectangular wave, mean value, effective value, Fourier series.

### 1. はじめに

電気工学科および電子工学科を主とする電気系の学科はもちろん、電子制御や機械系の学科でも、電気工学の基礎科目として交流理論を学習することは必須とされている。特に高専の電気系の学科では2年次で、低学年からの「くさび形教育」の一環として電気回路を学習することが多い。この場合、微積分を数学で学習するよりもやや早く、交流の平均値や実効値を学習することとなる。たとえば電気学会の「交流理論」でも、第1章で正弦波の平均値や実効値について述べている。<sup>1)</sup>

これに対して方形波の平均値や実効値は、積分の学習を待つまでもなく、図的にとらえれば、その値の求め方を理解しやすい。また、同じく第1章では、この正弦波交流に対して、周期  $T$  をもち、

正弦波でない全ての波形をひずみ波交流または非正弦波交流といい、正弦波を合成することにより、任意のひずみ波が形成されることを述べている。そして、三角波や方形波などの、ひずみ波の平均値や実効値についても述べているが、低学年ではややハードルが高いと感ずる学生が多い。

一方、高度情報化社会の基礎となるスペクトルでひずみ波波形をとらえることの大切さは、電気系の学生のみならず、機械系など全ての工学を学習する学生の必須である。フーリエ級数展開を含めたひずみ波交流の学習は、同教科書では第7章にあるなど、一通り交流理論を学習した後にこの方形波などを例として述べている。<sup>1) - 3)</sup>

本論文ではコンピュータなどのデジタル機器との橋渡しとして、感覚的にも理解しやすい方形波を用いたひずみ波交流の学習について、数学の学習進度に依らず、できるだけ図的に理解すること

---

\*1 電気情報工学科 tokoro@gifu-nct.ac.jp

が可能な学習方法を提案する。また、数学的な素養が確立された後に学ぶと考えられる電気系以外の学生に対しても、スペクトルを用いたひずみ波交流の学習の有用性を示唆することができるよう努める。また、最近のマルチメディア学習環境や機器の充実も考慮して、同環境での実習を取り入れた、ひずみ波交流の学習方法についても提案する。<sup>4) - 6)</sup>

## 2. 方形波を用いたひずみ波交流の学習

方形波を用いたひずみ波交流の学習で取り上げることのできるテーマ、取り上げるべきテーマとしては、1. 正弦波の合成と波形伝送、2. 方形波のフーリエ級数展開、3. 平均値と実効値、4. ひずみ波の電力、5. マルチメディア環境を用いたひずみ波の学習、等が考えられる。以下にそれらの各々について述べる。

### 2.1 正弦波の合成と波形伝送

周期 T の正弦波交流とその高調波成分を合成することにより、周期 T の任意のひずみ波を形成することができる。このことを本論文では、代表的なひずみ波である方形波を題材として学習させる。

$$y(t) = \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t \quad (1)$$

まず、式(1)に示される、大きさが周期に反比例して小さくなる奇数次高調波成分正弦波の合成波形を n=7 について求めさせる。この答は後述する問題 1 のように EXCEL 等の表計算ソフトなどにより求めさせると良い。その一例として、基本波の振幅を 1 とした、n が 7 の場合について図 1 に示す。n が大きくなるにつれてだんだん方形波に近づいていく。また、n を大きくしていくと、正及び負の立ち上がり部分にパルス状のピークが現れ、ギブスの現象が確認できる(問題 1)。

次に、図 2 と図 3 では、波形に含まれる各周波数成分の大きさを表すスペクトルは、基本波が 1 で第 3 高調波が 1/3 であり、同じである。両波形を印加電圧波形とすると、後で述べるように、その実効値や負荷で消費される電力は等しい。従って、ひずみ波をエネルギーとして捉える場合と、波形伝送を考える場合とでは取り扱いが異なるこ

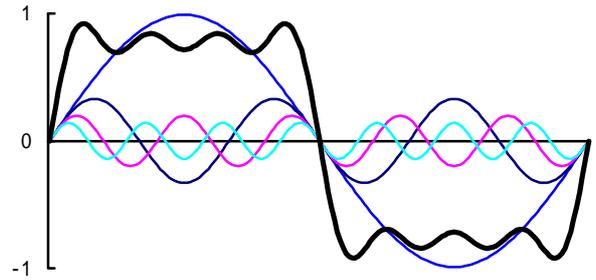


図1 第7高調波までの正弦波による方形波の合成

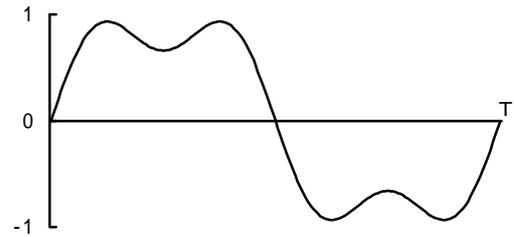


図2  $\sin t + (\sin 3 t)/3$

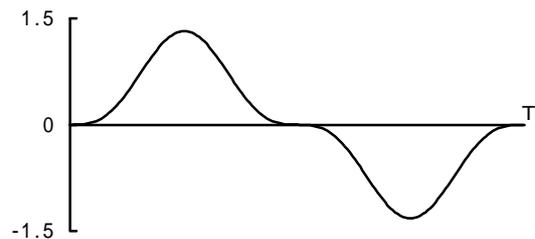


図3  $\sin t - (\sin 3 t)/3$

とに注意させる。前者はひずみ波の各高調波成分の大きさのみが、後者では大きさに加えて各高調波成分の位相が関係することを理解させる。<sup>1) - 3)</sup>

### 2.2 方形波のフーリエ級数展開

異なる周波数の正弦波を重ね合わせた波形をひずみ波ということ述べた後、周期 T の任意の周期波は逆に、この周期 T の基本波正弦波とその高調波である正弦波の合成からなることを説明する。この、各々の基本波及び高調波成分の大きさと位相をフーリエ係数と言い、ひずみ波をこの基本波と高調波成分からなるフーリエ級数に分解することをフーリエ展開ということ述べる。

例えば、振幅 1, 周期 T の正弦波は基本波成分のみであり、振幅 1, 周期 T の方形波は高調波成分を含むひずみ波である。この方形波をフーリエ展開すると、式(2)となる。

$$y(t) = \frac{4}{p} \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right)$$

$$= \frac{4}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\omega t \quad (2)$$

これらのフーリエ係数は、次式のように、 $y(t)$  の 1 周期分の波形と各周波数の正弦高調波とのかけ算の積分操作によって、その基本波の 1 周期  $T$  に対する平均値として求めることができる。

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\omega t dt \quad (3)$$

ここで、 $b_n$  は正弦成分であり、波形によってはこの他に  $a_n$  として、フーリエ級数の余弦成分もあることを説明しておく。

さて、第  $n$  高調波のフーリエ係数の正弦成分を求める式(3)を詳しく見ると、 $y(t)$  と第  $n$  正弦高調波をかけたものの、基本波 1 周期分  $T$  の平均値を求め、2 倍したものとなっている。この 2 倍する理由を、 $y(t)$  が振幅 1 の基本波正弦波  $\sin t$  のみの場合について説明する。フーリエ展開の考え方から、この場合のフーリエ係数は、正弦成分の  $b_1=1$  となるが、式(3)において、 $\sin^2 t$  の平均値を求めると、その値は  $1/2$  となることを、後述する式(8)やその図を用いて説明する。従って、フーリエ級数を求めるには式(3)の様に、 $y(t)$  と正弦高調波をかけたものの、基本波周期  $T$  の間の平均値を求めて 2 倍する必要があることを理解させる。

なお、一般の周期  $T$  の任意の周期波  $y(t)$  を、フーリエ級数を用いて、フーリエ展開して表すと次の式(4)となる。ここで、各フーリエ係数は、対象とする波形 1 周期分の、各周波数の正弦波高調波とのかけ算の積分操作によって、式(5)を用いて求めることができる。従って、フーリエ級数は、対象とする波形に基本波正弦波とその高調波成分が、それぞれどの程度含まれているか、どの程度似ているかを表すものであることを説明しておく。

$$y(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \dots$$

$$+ a_n \cos n\omega t + \dots$$

$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \dots$$

$$+ b_n \sin n\omega t + \dots$$

$$= A_0 + A_1 \sin(\omega t + \theta_1) + A_2 \sin(2\omega t + \theta_2) + \dots$$

$$+ A_n \sin(n\omega t + \theta_n) + \dots$$

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \theta_n) \quad (4)$$

ここで、

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{a_n}{b_n}$$

であり、それぞれ基本波成分の角周波数、第  $n$  高調波成分の大きさとして位相を表している。また、 $a_0=A_0$  は直流分を表している。余弦波成分と正弦波成分の各高調波成分に対する係数  $a_n, b_n$  および  $A_n, \theta_n$  が第  $n$  高調波のフーリエ係数である。

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt \quad (5)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos n\omega t dt \quad (5a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin n\omega t dt \quad (5b)$$

ここで、余弦と正弦の各成分の縦軸への投影が、それぞれの成分の瞬時値を表す図 4 を考えるとき、それぞれ、余弦波成分と正弦波成分の大きさを表す  $a_n$  と  $b_n$  は、余弦成分が  $a_n=A_n \sin n$  で、正弦成分が  $b_n=A_n \cos n$  であることに注意させる。

また、式(4)を複素数を用いた極座標表現により表せば、次の複素フーリエ級数展開の式となる。係数  $C_n$  は複素数の値をとり、2 倍の係数がないことに注意させる。なお、 $C_n$  の絶対値を振幅スペクトルといい、 $C_n$  の偏角を位相スペクトルという。これらは各高調波成分のフェーザの大きさと位相に対応していることを理解させる。

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} y(t) e^{-jn\omega t} dt \quad (6)$$

複素フーリエ変換は、EXCEL などの表計算ソフトでも行うことができる。時間領域データを実部とする場合、スペクトルの実数部が余弦波成分、負の虚数部が正弦波成分であることに注意が必要である。このことを図 4 と図 5 を用いて補足説明すること。図 4 では、横軸を基準とした場合の大きさ  $A_n$ 、角  $n$  のベクトルの、縦軸方向の成分は  $A_n \sin n$ 、横軸方向の成分が  $A_n \cos n$  である。しかしながら角速度  $n$  で反時計方向に回転するフェーザは、横軸正方向が  $\sin n t$  で、縦軸正方向が  $\cos n t$  であり、各フェーザの縦軸への投影がその時間変化のグラフである。

これに対して、フェーザを複素数表示したときの、実軸への投影をその時間変化のグラフとする場合は、図 4 を 90 度遅らせた形の図 5 となる。この場合もフェーザは反時計方向に角速度  $n$  で

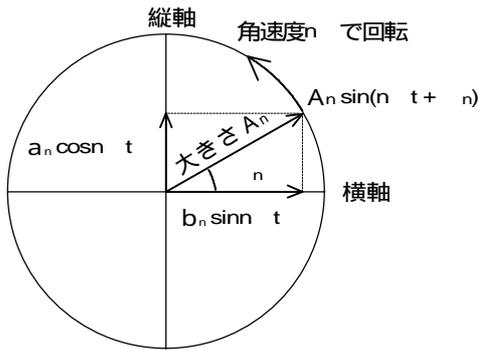


図4 振幅  $A_n$  位相  $\phi_n$  のベクトルの回転

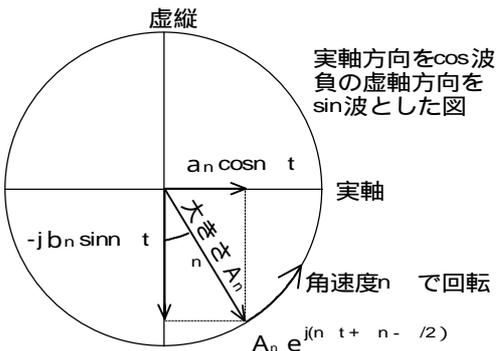


図5 実軸への投影が時間波形となる  
複素数表示のフェーザ

回転しており、その実軸への投影が時間波形となる。このことはオイラーの公式

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta \quad (7)$$

により正弦成分は右辺を  $j$  で割れば実部として求められることを表している。また、 $j$  で割ることは、大きさはそのまま、90度時計方向に回転させることを意味しており、 $\pi/2$ [rad]遅らせることを意味していることを説明しておく。従って、複素数表示の実数成分が余弦波成分、負の虚数成分が正弦波成分となる。

また、複素スペクトルの式から、周期関数  $y(t)$  が無限個の正、負角周波数成分の和として表現できることがわかる。ここで導入した負の角周波数は、正の角周波数を反時計方向の回転、負の角周波数を時計方向の回転に対応させたとき、物理的にも理解しやすいことを説明する。

### 2.3 方形波のフーリエ展開の図的解法

振幅1、周期  $T$  の方形波をフーリエ級数に、図を用いて展開する。まず、原点に対して点对称であり、余弦成分はない。また、90度(つまり  $T/4$ )に対しても対称であるため、奇数次高調波成分の

みとなる。式(3)より、0 から  $T/2$  と  $T/2$  から  $T$  は対称であるため、半周期の積分結果を2倍すればよい。従って、

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \quad a_n = 0, \quad b_{2n} = 0 \\ b_{2n-1} &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2n-1)\omega t dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(2n-1)\omega t dt \quad (8) \end{aligned}$$

であり、正弦波の奇数高調波成分のみが存在することとなる。 $y(t)$  は方形波であり0 から  $T/2$  にてその大きさは1である。従って、 $n=1$  の基本波の場合は、正弦波の平均値の2倍を求めることになる。ここで、正弦波の半周期の平均値は  $2/\pi$  である(2.4参照)。従って、振幅1の方形波の基本波正弦波成分の振幅は、この2倍の  $4/\pi$  となる。

第3高調波の場合は、方形波の半周期に第3高調波の正弦波は1.5波形が含まれるが、正の半波形と負の半波形は積分で相殺されるので、結局、正の半波形のみが残り、当然その面積は基本波の  $1/3$  となる。従って、上式の積分値は基本波の場合の  $1/3$  となる。同様に、第  $(2n-1)$  高調波の場合はその  $1/(2n-1)$  となる。

一般に方形波の振幅が  $A$  の場合は線形性により、それぞれの高調波成分の振幅を  $A$  倍とすればよい。よって、式(2)またはその  $A$  倍が振幅1または振幅  $A$  の方形波のフーリエ級数展開式となる。

### 2.4 方形波の平均値と実効値

まず、正弦波の平均値について説明する。積分を学習していない場合は、振幅1の正弦波半周期の面積は2であると覚えさせる。

$y(\theta) = \sin\theta$  の半周期の面積は、

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta = [-\cos\theta]_0^\pi = -(-1) - (-1) = 2 \quad (9)$$

であるため、その0から $\pi$ までの平均が  $2/\pi$  となり、これが正弦波の平均値である。1周期に対して積分すると、後ろ半周期の面積が  $-2$  であるため0となってしまうので、正弦波では便宜上、半周期の平均値(または絶対値の平均値)を、その平均値としていることに注意させる。

次に、実効値について説明する。交流電圧や電流の実効値  $E$  および  $I$  は、1周期にわたる各瞬時値の2乗平均の平方根であり、瞬時値をそれぞれ  $e, i$  とする場合、次の式(10)のように表される。

この式はひずみ波に対しても適用される。

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}, \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad (10)$$

これらの瞬時値として式(2)に示したような各高調波成分の和からなるひずみ波を考える場合、周波数の異なる正弦波の積の基本波1周期にわたる平均は必ず0となることから、周波数の等しい各高調波成分の2乗の平均のみが平方根の中に残り、式(11)のようになる。このEやIを、それぞれひずみ波の実効電圧、実効電流とも言うことを紹介しておく。

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (e_0 + e_1 + e_2 + \dots + e_n + \dots)^2 dt} \\ &= \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_n^2 + \dots} \\ I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots + I_n^2 + \dots} \quad (11) \end{aligned}$$

従って、直流分と基本波及び各高調波成分実効値の2乗和の平方根が、ひずみ波交流の実効値となることを説明する。電流も同様である。

次に、波高値1の方形波の平均値を求めさせる。方形波の平均値は振幅が1で一定なので、波高値と同じ1である。これを方形波のフーリエ級数による展開式から求めると、まず、基本波に関しては振幅が $4/\pi$ で、振幅1の正弦波の平均が $2/\pi$ であるため、基本波の平均値は $(4/\pi) \times (2/\pi) = 8/\pi^2$ となる。次に第3高調波に関して、方形波半周期あたりの面積は、高さである振幅は基本波の $1/3$ 、横幅も基本波の $1/3$ (なぜならば、基本波半周期当たり第3高調波の半波3個のうち、1周期分は+と-で打ち消しあうため)と考えられるため、 $1/3 \times 1/3 = 1/3^2$ となる。従って、第 $(2n-1)$ 高調波の面積は、振幅、幅とも $1/(2n-1)$ となるため、基本波の $1/(2n-1)^2$ となる。ここで、

$$\left( 1^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right) = \frac{P^2}{8} \quad (12)$$

であるので(問題4)方形波をスペクトルに分解したときにもその平均値は、 $(8/\pi^2) \times (\pi^2/8) = 1$ となる。

次に、波高値1の方形波の実効値が1となることを求めさせる。方形波の実効値は、ひずみ波交

流の実効値の式より、

$$\begin{aligned} E &= \frac{4}{P} \sqrt{E_1^2 + E_3^2 + E_5^2 + \dots + E_{2n-1}^2 + \dots} \\ &= \frac{4}{P} \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1^2 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots \right)} \\ &= \frac{4}{P} \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{P^2}{8}} \\ &= 1 \quad (13) \end{aligned}$$

となり、当たり前であるが1である。なお、 $E_1$ は振幅1の基本波の実効値であり、ルートの中で2乗しているのので、式(13)の2行目で、 $1/2$ を全ての高調波の波高値の2乗和から取り出している。

## 2.5 方形波の電力

電圧波形、電流波形共にひずみ波である場合の電力は、瞬時値eとiの積の1周期Tの間の平均値であるので、周波数の異なる電圧電流間の平均電力は0であり、電圧電流の各高調波成分の同次の高調波の間の電力を求め、加えればよい(重ね合わせの理)。従って、ひずみ波の平均電力Pは、

$$\begin{aligned} P &= E_0 I_0 + E_1 I_1 \cos \theta_1 + E_2 I_2 \cos \theta_2 + \dots \\ &\quad + E_n I_n \cos \theta_n + \dots \quad (14) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\theta_n$ は第n高調波電圧と電流の間の位相差である。このことは、抵抗 $1\Omega$ に振幅1Vの方形波を印加したときの電流が式(2)となり、式(14)により、式(2)の各高調波の2乗の和が1となることから理解できる。なお、正弦波の皮相電力に対応して、ひずみ波の実効電圧と実効電流の積をひずみ波の皮相電力、その有効電力Pとの比を実効力率ということを紹介すると良い。また、このひずみ波の実効電圧と実効電流に上記の実効力率の位相差があるとする、ひずみ波の等価正弦波としての取り扱いも紹介すると良い。

## 2.6 マルチメディア環境での学習

2の偶数乗個の時間サンプルデータに関して、EXCELの「ツールメニュー」の「分析ツール」にある「フーリエ解析」を用いて複素フーリエ解析を行うことができる。メニューに出てこない場合は追加インストールする必要がある。

図6は128個のデータに対して、余弦波と正弦

波を作製し、グラフとしたものである。次に、正弦波のデータに対して、フーリエ解析を行うとE列となる。複素数は「実部+虚部i」の形式の文字形データで出力されている。実部のみ、虚部のみを数値として取り出すにはIMREAL関数とIMAGINARY関数を用いる。虚部の2つ目のデータが-64となっており、正弦波のスペクトルは負の虚数成分であるという図5の関係を示している。これは、正弦波のデータ点数128点の半分の値となっている。残りの半分は、128番目のスペクトルデータとして64として解析される。

ところで、図6の正弦波はフーリエ逆変換を行っても得ることができる。この場合、基本波成分を0-128iとして、他のスペクトルデータは全て0としてEXCELの「分析ツール」の「フーリエ解析」の逆変換を用いる。この場合、基本波正弦波のデータを2番目と128番目に-64iと+64iに半分ずつにするのではなく、一つにまとめても振幅1の正弦波の時間データを逆変換結果の実部に得ることができる。

EXCELのフーリエ解析を用いることにより、128点のデータでは、スペクトルは直流分から第63高調波までの複素スペクトルを計算することができることも理解できる。(標本化定理)

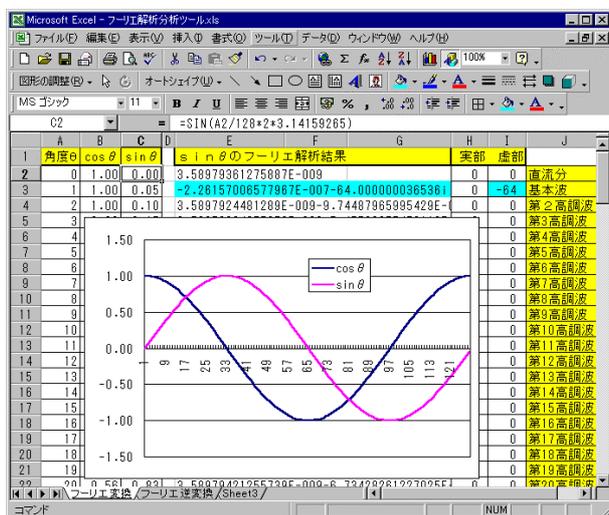


図6 EXCELによるフーリエ解析の一例

## 2.7 方形波を用いた問題例

問題1 EXCEL等の表計算ソフトにより第63高調波までの方形波を作成し、ギブスの現象を確かめよ。

問題2 EXCEL等の表計算ソフトにより第7高調波までの三角波をグラフ化せよ。

問題3 任意の高調波までの方形波と三角波をEXCELの分析ツールのフーリエ解析を用いて、フーリエ逆変換により求めよ。

問題4  $y=|x|$ で表される三角波のフーリエ級数を求め、余弦成分  $a_n \cos n t$  が  $t=0$  にて  $a_n$  となることを用いて、式(8)を証明せよ。

問題5 方形波の積分が三角波となることをそのフーリエ級数スペクトルの積分から示せ。

問題6 幅、振幅E、周期Tのパルス列の複素フーリエ級数  $C_n$  を求めよ。(標本化関数)

## 3. おわりに

方形波という、代表的なひずみ波ではあるが、波高値・平均値・実効値などが図的にも求めやすい波形を題材に、ひずみ波交流の平均値や実効値、電力やフーリエスペクトルなど、電気回路で学ぶ最重要項目を体系的に学ぶ方法を提案した。

EXCELなどの表計算ソフトを用いて、正弦波を合成することや、複素フーリエ解析を実習することはマルチメディア環境の充実した今、各高専の電気系実験・実習のテーマとしても、また、座学の内容を実学として理解する上でも、大いに役立つと思われる。本論文が、全国高専の学生のひずみ波交流に関する理解を深めることの一助となれば幸いである。

## 参考文献

- 1) 小郷 寛、「交流理論」、電気学会、1,7章。
- 2) 佐治 學、「電気回路A」、オーム社、12章。
- 3) 小郷 寛、「回路網理論」、電気学会、1章。
- 4) 佐藤敏行: CD-ROMを用いた一斉授業型および自主学習型マルチメディア教材の開発と実践, 高専教育, vol.23, pp.165-170 (2000).
- 5) 阿蘇, 山畑, 泉, 福本: 表計算ソフトによる課題学習(2) - 数値計算・視覚化による解析学教育 -, 高専教育, vol.23, pp.207-211 (2000).
- 6) 佐藤敏行: 三角関数の指導におけるマルチメディア教材の開発と実践, 高専教育, vol.24, pp.181-186 (2001).