シラバス http://www.gifu-nct.ac.jp/syllabus/index.html
目標，成績評価の方法 100 点 (期末) + 100 点〜 250 点 (平常試験等) の得点率，
達成度評価の基準①〜⑥，授業の進め方，教科書および参考書，授業 (15 回) の概要と予定

フーリエ変換・偏微分方程式・特殊関数
周期関数に対する フーリエ級数 と非周期関数に対する フーリエ積分 ・ フーリエ変換 の計算．
また，これらの変換を利用した， 偏微分方程式 の 境界値問題や初期値問題 の解法．
特殊関数 を利用した，極座標・円柱座標・球座標での偏微分方程式の解法．

周期 (period) と周期関数 (periodic function)　周期とは？周期関数とは？

x に対する 周期 p の 周期関数: $f(x+p)=f(x)$ [p.60—63]

関連問題 [p.62 1. 2.]

1a (a) $\sin x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\sin \pi x$ (d) $\cos 2\pi x$ (e) $\sin kx$ (f) $\cos \dfrac{\pi x}{L}$ (g) $\sin \dfrac{k\pi x}{L}$ の周期 p

[解] (a) $\sin(x+2\pi)=\sin x$ だから, 周期 $p=2\pi$.
(b) $\cos(2x+2\pi)=\cos 2x$, つまり $\cos(2(x+\pi))=\cos 2x$ だから, 周期 $p=\pi$
(c) $\sin(\pi x+2\pi)=\sin \pi x$, つまり $\sin(\pi(x+2))=\sin \pi x$ だから, 周期 $p=2$
(d) $\cos(2\pi x+2\pi)=\cos 2\pi x$, つまり $\cos(2\pi(x+1))=\cos 2\pi x$ だから, 周期 $p=1$
(e) $\sin(kx+2\pi)=\sin kx$, つまり $\sin(k(x+\frac{2\pi}{k}))=\sin kx$ だから, 周期 $p=\dfrac{2\pi}{k}$
(f) $\cos\left(\dfrac{\pi x}{L}+2\pi\right)=\cos\dfrac{\pi x}{L}$, つまり $\cos\left(\dfrac{\pi}{L}(x+2L)\right)=\cos\dfrac{\pi x}{L}$ だから, 周期 $p=2L$
(g) $\sin\left(\dfrac{k\pi x}{L}+2\pi\right)=\sin\dfrac{k\pi x}{L}$, つまり $\sin\left(\dfrac{k\pi}{L}(x+\frac{2L}{k})\right)=\sin\dfrac{k\pi x}{L}$ だから, 周期 $p=\dfrac{2L}{k}$

フーリエ級数 (Fourier series) とフーリエ係数 (Fourier coefficient)　フーリエ級数とは？

周期 2π の周期関数 $f(x)$ の フーリエ級数 : $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

フーリエ係数: $a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx,\quad b_k=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx,\quad (k=1,2,\cdots).$ [p.63—71]

関連問題 [p.~~62~~ 71 1.—16.][p.65 例 1]

1b $f(x)=\begin{cases}1 & (|x|<\pi/2)\\ 0 & (\pi/2<|x|<\pi)\end{cases}$　$f(x+2\pi)=f(x)$ を図示して， $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

[解] $f(x)$ は周期 2π の周期関数. そして, $f(x)$, $f(x)\cos kx$ は偶関数で, $f(x)\sin kx$ は奇関数だから, フーリエ係数は,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}1dx=\frac{2}{\pi}\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=1$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos kx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2\sin\frac{k\pi}{2}}{k\pi}$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=0$$

となり, $f(x)$ のフーリエ級数は,

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin\frac{k\pi}{2}}{k\pi}\cos kx=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\cdots\right)$$

一般の周期関数のフーリエ級数 (Fourier series) とフーリエ係数 (Fourier coefficient)

周期 $2L$ の周期関数 $f(x)$ の フーリエ級数：$f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{k\pi x}{L}\right)$,

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}dx, \quad b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx, \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

[p.72—82]

関連問題 [p.74 1.—20.][p.73 例 1]

$\boxed{\mathbf{1c}}$ $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1) \\ -1 & (-1 \leq x < 0) \end{cases}$ $p = 2L = 2$ を図示して，$f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

[解] $f(x)$ は周期 $2L = 2$ の周期関数. $L = 1$. そして，$f(x)$, $f(x)\cos\frac{k\pi x}{L}$ は奇関数で，$f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}$ は偶関数だから，フーリエ係数は，$a_k =$ 0

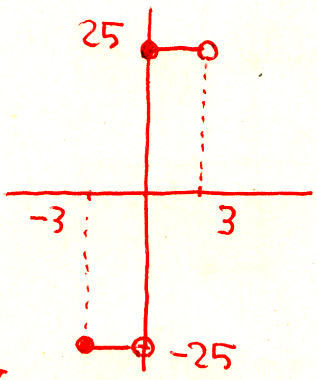
$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{k\pi x}{L}dx = \frac{2}{1}\int_0^1 1\cdot\sin\frac{k\pi x}{1}dx = 2\left[\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\right]_0^1 = \frac{2(1-\cos k\pi)}{k\pi}$$

$$= \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi}$$

となり，$f(x)$ のフーリエ級数は，

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{L} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^k)}{k\pi} \sin\frac{k\pi x}{\cancel{3}\,1} = \frac{4}{\pi}\left(\sin\pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \cdots\right)$$

$f(x) = \begin{cases} 25 & (0 \leqq x < 3) \\ -25 & (-3 \leqq x < 0) \end{cases}$



のフーリエ級数

$2L = 6$ $\quad L = 3$

$f(x)$, $f(x)\cos\dfrac{k\pi x}{3}$ 奇関数

$f(x)\sin\dfrac{k\pi x}{3}$ 偶 〃 $\rightarrow$ $a_k = 0$

$$b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 25\cdot\sin\frac{k\pi x}{3}dx = \frac{2}{\cancel{3}}\left[-25\cdot\frac{\cancel{3}}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\right]_0^3 = \frac{50(1-\cos k\pi)}{k\pi}$$

$$= \frac{50(1-(-1)^k)}{k\pi}$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{50(1-(-1)^k)}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{3} = \frac{100}{\pi}\sin\frac{\pi x}{3} + \frac{100}{3\pi}\sin\pi x + \frac{100}{5\pi}\sin\frac{5\pi x}{3} + \cdots$$