絶対積分可能な (非周期) 関数　　非周期とは？絶対積分可能とは？

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$ を満たす (非周期) 関数 $f(x)$

[p.93—96]

$\boxed{\textbf{2a}}$ (a) $f(x) = C(\neq 0)$　(b) $f(x) = e^x$　(c) $f(x) = x^2$　(d) $f(x) = e^{-x^2}$

(e) $f(x) = 1(|x| < 1)$,　$f(x) = \frac{1}{2}(|x| = 1)$,　$f(x) = 0(|x| > 1)$ は, 絶対積分可能か.

[解] (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|C|dx = 2|C|\int_{0}^{\infty}dx = 2|C|\left[x\right]_0^{\infty} = \infty$ だから, 絶対積分可能でない

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|e^x|dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^x dx = \left[e^x\right]_{-\infty}^{\infty} = \infty$ だから, でない

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x^2|dx = 2\int_{0}^{\infty}x^2 dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\infty} = \infty$ だから, でない

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|e^{-x^2}|dx = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} < \infty$ だから, である

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = \int_{-\infty}^{-1}0dx + \int_{-1}^{1}1dx + \int_{1}^{\infty}0dx = 0 + \left[x\right]_{-1}^{1} + 0 = 2 < \infty$ だから,

フーリエ積分 (Fourier integral)　　フーリエ積分とは？

絶対積分可能な関数 $f(x)$ の <u>フーリエ積分</u>：$\displaystyle f(x) = \int_0^{\infty}\{C(\alpha)\cos\alpha x + S(\alpha)\sin\alpha x\}d\alpha$,

$\displaystyle C(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt$,　$\displaystyle S(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt.$

[p.93—102]

$\displaystyle\alpha = \frac{k\pi}{L}$,　$\displaystyle\Delta\alpha = \frac{(k+1)\pi}{L} - \frac{k\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$,　($\underline{\alpha = k\Delta\alpha}$) とおいて, フーリエ係数

$$a_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{k\pi t}{L}dt = \frac{\Delta\alpha}{\pi}\int_{-L}^{L}f(t)\cos(k\Delta\alpha t)dt = \Delta\alpha C(k\Delta\alpha)$$

$$b_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{k\pi t}{L}dt = \frac{\Delta\alpha}{\pi}\int_{-L}^{L}f(t)\sin(k\Delta\alpha t)dt = \Delta\alpha S(k\Delta\alpha)$$

をフーリエ級数に代入して, $L \to \infty$ の極限を考える. $(\Delta\alpha \to 0)$

$$f(x) = \frac{\Delta\alpha C(0)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Delta\alpha\left(C(k\Delta\alpha)\cos(k\Delta\alpha x) + S(k\Delta\alpha)\sin(k\Delta\alpha x)\right)$$

$$\to 0 + \int_0^{\infty}d\alpha\left(C(\alpha)\cos\alpha x + S(\alpha)\sin\alpha x\right)\quad\left(\Delta\alpha = \frac{\pi}{L} \to 0\right)$$

[p.93—102]

$\boxed{\textbf{関連問題}}$ [p.101 1.—18.][p.65 例 1]　問題2.8 13.

$\boxed{\textbf{2b}}$ $f(x) = 1\ \ (0 < x < a)$,　$f(x) = -1\ \ (-a < x < 0)$,　$f(x) = 0\ \ (a < |x|)$

を図示して,　$f(x)$ のフーリエ積分を求めよ.

[解] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = 2\int_0^a 1dx + 2\int_a^{\infty}0dx = 2\left[x\right]_0^a + 0 = 2a < \infty$ だから, $f(x)$ は絶対積分可能

そして, $f(t)$, $f(t)\cos\alpha t$ は奇関数で, $f(t)\sin\alpha t$ は偶関数だから,

$$C(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\alpha t dt = 0$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin\alpha t dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^a 1\cdot\sin\alpha t dt + \int_a^{\infty}0\cdot\sin\alpha t dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\cos\alpha t}{\alpha}\right]_0^a = \frac{2(1-\cos\alpha a)}{\alpha\pi}$$

となり, $f(x)$ のフーリエ積分は,

$$f(x) = \int_0^{\infty}\frac{2(1-\cos\alpha a)}{\alpha\pi}\sin\alpha x\, d\alpha$$

$\boxed{\textbf{2c}}$ $f(x) = x \quad (|x| < a)$, $\quad f(x) = 0 \quad (a < |x|)$ を図示して，$f(x)$ のフーリエ積分を求めよ.

[解] $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = 2\int_0^a x dx + 2\int_a^{\infty} 0 dx =$ 　　　　　　だから, $f(x)$ は

そして, $f(t)$, $f(t)\cos\alpha t$ は奇関数で, $f(t)\sin\alpha t$ は偶関数だから,

$$C(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\alpha t dt =$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} f(t)\sin\alpha t dt = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^a t\cdot\sin\alpha t dt + \int_a^{\infty} 0\cdot\sin\alpha t dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\cdot\frac{-\cos\alpha t}{\alpha}\right]_0^a - \int_0^a 1\cdot\frac{-\cos\alpha t}{\alpha}dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[t\cdot\frac{-\cos\alpha t}{\alpha} + \frac{\sin\alpha t}{\alpha^2}\right]_0^a\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-a\cos\alpha a}{\alpha} + \frac{\sin\alpha a}{\alpha^2}\right)$$

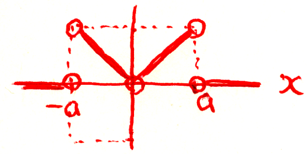
となり, $f(x)$ のフーリエ積分は,

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{-a\cos\alpha a}{\alpha} + \frac{\sin\alpha a}{\alpha^2}\right)\sin\alpha x \, d\alpha$$

$f(x)=x$ $(0<x<a)$ $f(x)=-x$ $(-a<x<0)$ $f(x)=0$ $(a<|x|)$ を図示して, $f(x)$のフーリエ積分を求めよ.

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx = 2\int_0^a x dx + 2\int_0^{\infty} 0 dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = a^2 < \infty$$

$f(x)$は絶対積分可能.



$f(x)$, $f(x)\cos\alpha x$ は偶関数, $f(x)\sin\alpha x$ は奇関数 だから.

$$S(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx = 0$$

$$C(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} x\cos\alpha x dx = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^a x\cos\alpha x dx + \underbrace{\int_a^{\infty} 0\cdot\cos\alpha x dx}_{0}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right]_0^a - \int_0^a 1\cdot\frac{\sin\alpha x}{\alpha}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin\alpha x}{\alpha} + \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2}\right]_0^a\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(a\frac{\sin\alpha a}{\alpha} + \frac{\cos\alpha a}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

$$\therefore \ f(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(a\frac{\sin\alpha a}{\alpha} + \frac{\cos\alpha a}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right)\cos\alpha x \, d\alpha$$