フーリエ変換，フーリエ逆変換

$\hat{f}(\alpha)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\alpha)\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$. このとき，$\hat{f}(\alpha)$ を $f(x)$ の フーリエ変換(Fourier transform) といい，$\hat{f}(\alpha)=\mathcal{F}\{f(x)\}$ とも記号で書く．これは，実数空間 x の関数 $f(x)$ をフーリエ空間 α の関数 $\hat{f}(\alpha)$ に変換する．逆に，$f(x)$ に変換する右の式を $\hat{f}(\alpha)$ の フーリエ逆変換(inverce Fourier transform) といい，$f(x)=\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\alpha)\}$ とも記号で書く．

[p.109]

係数の異なる $\hat{f}(\alpha)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$, $f(x)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$, も用いる．

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\alpha x-i\sin\alpha x)dx \qquad [\because \text{オイラーの公式}]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x dx-i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\alpha x dx=\pi C(\alpha)-i\pi S(\alpha)=\pi(C(\alpha)-iS(\alpha)).$$

フーリエ変換 $\hat{f}(\alpha)$ は，フーリエ積分の係数 $C(\alpha)$,$S(\alpha)$ を複素形式にしたものといえる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\pi(C(\alpha)-iS(\alpha))(\cos\alpha x+i\sin\alpha x)d\alpha \qquad [\because \text{オイラーの公式}]$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(C(\alpha)\cos\alpha x+S(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha+i\frac{\pi}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty}(C(\alpha)\sin\alpha x-S(\alpha)\cos\alpha x)d\alpha$$

[ここで，$C(\alpha)$, $C(\alpha)\cos\alpha x$, $S(\alpha)\sin\alpha x$ は α について偶関数であり，
$S(\alpha)$, $C(\alpha)\sin\alpha x$, $S(\alpha)\cos\alpha x$ は α について奇関数であるので，]

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}(C(\alpha)\cos\alpha x+S(\alpha)\sin\alpha x)d\alpha+i0=\sqrt{2\pi}f(x). \qquad [\because \text{フーリエ積分}]$$

フーリエ逆変換は，フーリエ積分を複素形式に拡張したものといってよい．

[p.107—109]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt\right)e^{i\alpha x}d\alpha=\cdots=2\pi f(x). \qquad \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\}=f(x)$$

関連問題 [p.114 1.—15.][p.109 例 1][p.110 例 2]

3a (1) $f(x)=\begin{cases}1 & (a<x<b)\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$ (2) $f(x)=e^{-ax^2}$ $(a>0)$ を図示して，フーリエ変換せよ．

[解](絶対積分可能な関数である．このことは省略．)

(1) $\alpha\neq 0$ のとき，

$$\hat{f}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\overset{x}{\cancel{t}})e^{-i\alpha x}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{a}0\cdot e^{-i\alpha x}dx+\int_{a}^{b}1\cdot e^{-i\alpha x}dx+\int_{b}^{\infty}0\cdot e^{-i\alpha x}dx\right)$$

$$=0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right]_a^b+0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{-i\alpha b}-e^{-i\alpha a}}{-i\alpha}=\frac{e^{-i\alpha a}-e^{-i\alpha b}}{\sqrt{2\pi}\,\alpha i}=\frac{e^{-i\alpha b}-e^{-i\alpha a}}{\sqrt{2\pi}\,\alpha}i$$

$\alpha=0$ のとき，

$$\hat{f}(\alpha)=\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{0}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{a}0\cdot 1dt+\int_{a}^{b}1\cdot 1dt+\int_{b}^{\infty}0\cdot 1dt\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\big[t\big]_a^b=\frac{b-a}{\sqrt{2\pi}}$$

(2) $$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-i\alpha x}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2+\frac{i\alpha}{k}x\right)}dx$$

ここで，$-a\left(x^2+\dfrac{i\alpha}{a}x\right)=-a\left\{\left(x+\dfrac{i\alpha}{2a}\right)^2+\dfrac{\alpha^2}{4a^2}\right\}=-au^2-\dfrac{\alpha^2}{4a}$ とおくと，

$$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-au^2-\frac{\alpha^2}{4a}}du=e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-au^2}du}_{\sqrt{\frac{\pi}{a}}}=e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \hat{f}(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}. \quad \|$$

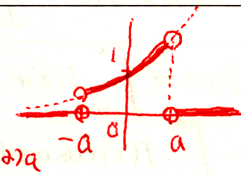
$\boxed{\mathbf{3b}}$ $\boxed{3a}$ の $\hat{f}(\alpha)$ をフーリエ逆変換せよ. [p.118]

[解] $\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}e^{i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{4a}\left(\alpha^2-4ai\alpha x\right)}d\alpha$

ここで, $\displaystyle -\frac{1}{4a}\left(\alpha^2-4ai\alpha x\right) = -\frac{1}{4a}\left\{(\alpha-2aix)^2+4a^2x^2\right\} = -\frac{1}{4a}u^2 - ax^2$ とおくと,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{1}{4k}u^2-kx^2}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-ax^2}\overbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{4a}u^2}du}^{\sqrt{4a\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-ax^2}\sqrt{4a\pi} = e^{-ax^2} \quad \|$$

$\boxed{\mathbf{3c}}$ $f(x)=e^x$ $(|x|<a)$, $f(x)=0$ $(a<|x|)$ を図示して, $f(x)$ のフーリエ変換を求めよ.

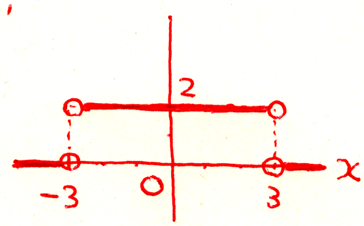


$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\alpha x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-a}0\,dx + \int_{-a}^{a}e^{x}e^{-i\alpha x}dx + \int_{a}^{\infty}0\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{(1-i\alpha)x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{(1-i\alpha)x}}{1-i\alpha}\right]_{-a}^{a} = \frac{e^{(1-i\alpha)a}-e^{-(1-i\alpha)a}}{\sqrt{2\pi}(1-i\alpha)} \quad //$$

$\boxed{3d}$ $f(x)=x$ $(0<x<a)$ $f(x)=0$ (それ以外)

$f(x)=2$ $(|x|<3)$ $f(x)=0$ $(|x|>3)$ を図示して,
フーリエ変換 $\hat{f}(\alpha)$ を求めよ.



$$\hat{f}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\alpha x}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{-3}0\,dx + \int_{-3}^{3}2e^{-i\alpha x}dx + \int_{3}^{\infty}0\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[2\frac{e^{-i\alpha x}}{-i\alpha}\right]_{-3}^{3} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-i3\alpha}-e^{i3\alpha}}{-i\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{e^{-i3\alpha}-e^{i3\alpha}}{\alpha}i$$