

条件付き確率 (conditional probability)

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

A が起こったという条件のもとで
B が起こる事象の条件付き確率

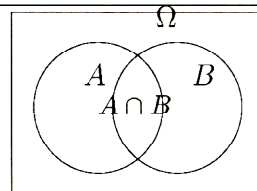
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B が起こったという条件のもとで
A が起こる事象の条件付き確率

[p.18 19]

[注] $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0,$

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

乗法定理 (multiplication theorem) — 積事象 $A \cap B$ の確率

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

[注] A, B が互いに独立 (independent) であるとき $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

[p.19—20]

事象の独立 (independence)

[p.21—22]

$$P(B|A) = P(B) \quad B \text{ は } A \text{ に独立}$$

$$P(A|B) = P(A) \quad A \text{ は } B \text{ に独立}$$

$$\begin{aligned} &\updownarrow \\ &\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \\ &\updownarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\updownarrow \\ &\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \\ &\updownarrow \end{aligned}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad A, B \text{ は独立}$$

[例] B は A に独立, A は B に独立.

$$P(B|A) = P(B) = \frac{4}{13}, \quad P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}.$$

$$\text{また [2] より, } P(A)P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{13} = \frac{1}{13} = P(A \cap B).$$

		Ω	JQKA
$\clubsuit$			B
$\diamond$			
$\spadesuit$			
$\heartsuit$	A		

ベイズ (Bayes) の定理

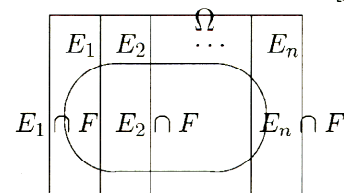
1つの試行を行うとき, 互いに排反な事象 $E_1, E_2, \dots, E_n$ のどれかが必ず起こり,
ある事象 F について, $P(E_k|F) = \frac{P(E_k \cap F)}{P(F)} = \frac{P(E_k)P(F|E_k)}{\sum_{i=1}^n P(E_i)P(F|E_i)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

が成立する. [注] $P(F) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(F|E_i)$ が成立することを以下に示す.

[p.25 10.]

$E_1 \cap F, E_2 \cap F, \dots, E_n \cap F$ は互いに排反であり,
 $F = (E_1 \cap F) \cup (E_2 \cap F) \cup \dots \cup (E_n \cap F)$ であるから,
確率の公理 (III) より

$$\begin{aligned} P(F) &= P(E_1 \cap F) + P(E_2 \cap F) + \dots + P(E_n \cap F) \\ &= \sum_{i=1}^n P(E_i \cap F) \quad \text{確率の乗法定理より} \end{aligned}$$



$$P(F) = P(E_1)P(F|E_1) + P(E_2)P(F|E_2) + \dots + P(E_n)P(F|E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(F|E_i) \quad \parallel$$

注 $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$ は事前確率, $P(E_1|F), P(E_2|F), \dots, P(E_n|F)$ は事後確率.

注 $P(F|E_1) \neq P(F \cap E_1)$ であることを両辺の意味から考えると良い.

[p.25 10.]

関連問題 [p.19 1.16][p.18 1.5][p.19 1.6][p.20 1.17]

3 トランプカード52枚のうち, エース(A) キング(K), クイーン(Q), ジャック(J)の4種類を絵札とする. 1枚のカードを取り出すことを考える.

(1) 全事象 Ω の場合の数を求めて, スペードである事象 A と, 絵札である事象 B の場合の数と確率をそれぞれ求めよ.

(2) スペードの絵札である事象の場合の数と確率

を求めよ.

(3) 条件付き確率の定義により, スペードであると分かったとき, 絵札である確率を求めよ.

(4) 同様に, 絵札であると分かったとき, スペードである確率を求めよ.

(4) A と B は独立か調べよ.

$$(1) n(\Omega) = 52$$

$$n(A) = 13 \quad P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad n(B) = 4 \times 4 = 16 \quad P(B) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

$$(2) A \cap B = \{\heartsuit K, \heartsuit Q, \heartsuit J, \heartsuit A\} \quad n(A \cap B) = 4 \quad P(A \cap B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$(3) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{4}{13}$$

$$(4) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{52}}{\frac{16}{52}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

$$(5) P(A)P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{13} = \frac{1}{13} = P(A \cap B) \quad A, B \text{ は互いに独立}$$

$$(1) n(\Omega) = 52$$

$$n(A) = 13 \quad P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \quad n(B) = 4 \times 3 = 12 \quad P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$(2) A \cap B = \{\heartsuit K, \heartsuit Q, \heartsuit J\} \quad n(A \cap B) = 3 \quad P(A \cap B) = \frac{3}{52}$$

$$(3) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{3}{13}$$

$$(4) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{52}}{\frac{12}{52}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$(5) P(A)P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{13} = \frac{3}{52} = P(A \cap B) \quad A, B \text{ は互いに独立}$$