確率分布

確率変数(random variable) X 値を代入すると，確率が定まる変数

事象 $X = x_i \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$

確率 $P(X = x_i) = p_i \qquad (1)$

$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_i p_i = 1 \qquad (2)$

Xは確率分布(1)に従う

確率分布(probability distribution) とは (2) を満たすときの 式 (1) のこと．表や図でも表す．

[p.26—27]

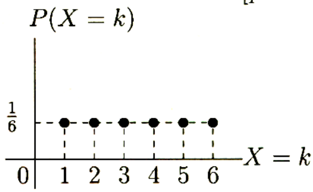
例 サイコロを振る試行で，出る目の数 X とする．

事象 $X = 1$, $X = 2$, $\cdots$, $X = 6$

確率 $P(X=1) = \frac{1}{6}$, $P(X=2) = \frac{1}{6}$, $\cdots$, $P(X=6) = \frac{1}{6}$

表：サイコロの出る目 X の確率分布

$X=k$	1	2	3	4	5	6	計
$P(X=k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1



図：出る目 X の確率分布

例 $P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

関連問題 [p.27 問題 2.1][p.26 例 2.1] [p.42 練習問題]

5a 白球3個と赤球2個が入っている箱から3個を同時にとり出す．白球の出た回数を X とする．
(1) 事象 $X = r$ の確率の計算式を書いて，その値をすべて求めよ．
(2) X の確率分布を表に示し，そのヒストグラムを描け．

(1) 全事象

$n(\Omega) = {}_5C_3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

$P(X=r) = \frac{n(X=r)}{n(\Omega)} = \frac{{}_3C_r \times {}_2C_{3-r}}{{}_5C_3}$

$P(X=0) = 0$

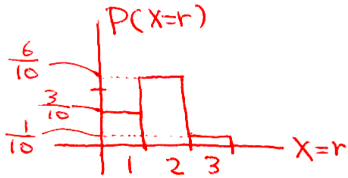
$P(X=1) = \frac{{}_3C_1 \times {}_2C_2}{{}_5C_3} = \frac{\frac{3}{1} \times 1}{10} = \frac{3}{10}$

$P(X=2) = \frac{{}_3C_2 \times {}_2C_1}{{}_5C_3} = \frac{\frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \times \frac{2}{1}}{10} = \frac{6}{10}$

$P(X=3) = \frac{{}_3C_3 \times {}_2C_0}{{}_5C_3} = \frac{1 \times 1}{10} = \frac{1}{10}$

(2)

$X=r$	1	2	3	計
$P(X=r)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	1



2項分布

2項分布 (binomial distribution) $B(n, p)$ (独立試行をくり返すときの確率)

$X = r = 0, 1, 2, \cdots, n$

$$P(X = r) = {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} \qquad (1)$$

$$\sum_{r=0}^{n} {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} = 1 \qquad (2)$$

[p.33—35]

注 2項定理 $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r a^{n-r} b^r$ に $a = 1-p$ $b = p$ を代入すると，

$$(1 - \cancel{p} + \cancel{p})^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r (1-p)^{n-r} p^r, \quad \therefore \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} = 1^n = 1$$

関連問題 [p.27 問題 2.1(2)][p.35 問題 2.7][p.33 例題 2.1]　[p.36 問題 2.10][p.42 練習問題]

5b 白球 3 個と赤球 2 個が入っている箱から 1 個とり出す，色を調べて箱に戻す．この試行を 3 回くり返すとき，白球の出た回数を X とする．

(1) 1 回の試行で白球の出る確率 p と独立試行の回数 n はいくつか．

(2) X が従う分布は何か．記号も書け．

(3) 事象 $X=k$ の確率の計算式を書いて，その値をすべて求めよ．

(4) X の確率分布を表に示し，そのヒストグラムを描け．

(1) $p=\frac{3}{5}$　$n=3$

(2) 2項分布 $B(3,\frac{3}{5})$

(3) $P(X=k)={}_3C_k\left(\frac{3}{5}\right)^k\left(1-\frac{3}{5}\right)^{3-k}$

$P(X=0)={}_3C_0\left(\frac{3}{5}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^3=1\cdot1\cdot\frac{2^3}{5^3}=\frac{8}{125}$

$P(X=1)={}_3C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{3}{1}\cdot\frac{3\cdot2^2}{5^3}=\frac{36}{125}$

$P(X=2)={}_3C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{3\cdot\cancel{2}}{\cancel{2}\cdot1}\cdot\frac{3^2\cdot2}{5^3}=\frac{54}{125}$

$P(X=3)={}_3C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^0=1\cdot\frac{3^3}{5^3}\cdot1=\frac{27}{125}$

(4)

$X=k$	0	1	2	3	計
$P(X=k)$	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$	1