確率分布での平均，分散・標準偏差

確率分布

$X=x_i$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
$P(X=x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

X の 平均 (mean, average), 期待値 (expectation (value))

$$E[X] = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i \ (=\mu)$$

注 X の平均 $= \dfrac{X\text{ の総和}}{\text{総数}} = \dfrac{x_1 n(X=x_1)+\cdots+x_n n(X=x_n)}{n(\Omega)} = E[X]$. ここで $p_i = \dfrac{n(X=x_i)}{n(\Omega)}$

注 p.27 くじの賞金の期待値 $= \dfrac{\text{賞金の総額}}{\text{総本数}}$ = [各等の賞金とその 確率 の積 の和]

$\varphi(X)$ の 平均 (mean, average), 期待値 (expectation (value))

$$E[\varphi(X)] = \varphi(x_1)p_1 + \varphi(x_2)p_2 + \cdots + \varphi(x_n)p_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)p_i$$

X の 分散 (variance)　X の値の散らばり方の度合を表す．平均 μ からの差の 2 乗の平均．

$$V[X] = E[(X-\mu)^2] = (x_1-\mu)^2p_1 + (x_2-\mu)^2p_2 + \cdots + (x_n-\mu)^2p_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2p_i$$

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = E[X^2] - \mu^2 = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \cdots + x_n^2p_n - \mu^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2p_i - \mu^2$$

X の標準偏差 (standard deviation)　X の値の散らばり方の度合を表す．X の分散の平方根．

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$$

[p.27—33]

注 $V[X] = E[(X-\mu)^2] = \sum_i (x_i-\mu)^2p_i = \sum_i (\ x_i^2 - 2x_i\mu + \mu^2\ )p_i$
$= \sum_i x_i^2p_i - 2\mu\sum_i x_ip_i + \mu^2\sum_i p_i = E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2 = E[X^2] - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

注 **平均，分散・標準偏差の性質**　定数 a, b について

$E[aX+b] =$ 　　　　, $E[a\varphi(X) + b\psi(X)] =$

$V[aX+b] =$ 　　　　, $\sigma[aX+b] =$

ポアソン分布

(Poisson distribution) $Po(\lambda)$　(2 項分布との関係)

$X = r =$

$$P(X=r) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} \quad (1) \qquad \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} = \quad (2)$$

[p.71—74]

注 マクローリン展開 $e^x = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{x^r}{r!}$ に $x=\lambda$ を代入し $\sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!} = e^{-\lambda}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = e^{-\lambda+\lambda} = e^0 = 1$

注 **ポアソン分布と 2 項分布の関係**　2 項分布 $B(n,p)$ において，$np=\lambda$(定数：平均) として，試行の回数 n が十分大きく，したがって 1 回の試行での確率 p が十分小さいとき，ポアソン分布 $Po(\lambda)$ で近似できる．$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (np=\lambda)}} {}_nC_r p^r(1-p)^{n-r} =$ 　　　あるいは，形式的に $\lim_{\substack{n\to\infty \\ (np=\lambda)}} B(n,p) = Po(\lambda)$

(多数回の試行でも) 極めてまれにしか起こらない事象がある回数起こる確率の計算に応用．

2 項分布 $B(n,p)$ の平均，分散・標準偏差　$E[X] =$ 　　$V[X] =$ 　　$\sigma[X] =$

ポアソン分布 $Po(\lambda)$ の平均，分散・標準偏差　$E[X] =$ 　　$V[X] =$ 　　$\sigma[X] =$

[p.35,36,41,72]

関連問題 [p.31 問題 2.3][例題 2.4][p.29 問題 2.2] [p.28 例 2.3][p.29 例 2.4][p.31 例 2.5][p.59 練習問題]

6 次の表の確率変数の平均と分散と標準偏差を求めよ．ただし，分散は異なる2通りの方法で求めよ．また，(a) で分散を求めるとき，平均を μ とすること．

(a)

$X=k$	x_1	x_2	計
$P(X=k)$	p_1	p_2	1

(b)

$Y=k$	1	2	3	4	計
$P(Y=k)$	0.4	0.3	0.2	0.1	1

(a) $E[X]=x_1p_1+x_2p_2 (=\mu)$

$V[X]=(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2$

$V[X]=x_1^2p_1+x_2^2p_2-\mu^2$

$\sigma[X]=\sqrt{x_1^2p_1+x_2^2p_2-\mu^2}$

(b) $E[Y]=1\times0.4+2\times0.3+3\times0.2+4\times0.1=0.4+0.6+0.6+0.4=2.0$

$V[Y]=(1-2)^2\times0.4+(2-2)^2\times0.3+(3-2)^2\times0.2+(4-2)^2\times0.1$

$=0.4+0+0.2+0.4=1.0$

$V[Y]=1^2\times0.4+2^2\times0.3+3^2\times0.2+4^2\times0.1-2.0^2$

$=\underbrace{0.4+1.2+1.8+1.6}_{=5.0}-4.0=5.0-4.0=1.0$

$\sigma[Y]=\sqrt{1.0}=1.0$