

極形式 (polar form) $|\alpha|$ 極形式とは? 偏角とは?

[p.120—122]

極形式 平面の上で, 直交座標での点 (a, b) と極座標での点 (r, θ) には, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ の関係があるので, $\alpha = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta$ となり, $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ を α の **極形式** (polar form) という. オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を使用して, $\alpha = r e^{i\theta}$ とも書く. ここで, $r = |\alpha|$ は α の **絶対値** であり, $\theta = \arg \alpha$ は α の **偏角** (argument) といい, 実軸の正の部分と線分 $O\alpha$ が作る角度で, 反時計回りが正である.

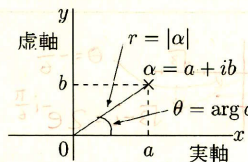


図 4-1: 極形式

$\alpha = |\alpha|(\cos \arg \alpha + i \sin \arg \alpha)$, あるいは, $\alpha = |\alpha|e^{i \arg \alpha}$ とも書ける. $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$, であり, そして, $\frac{b}{a} = \frac{r \sin \theta}{r \cos \theta} = \tan \theta$ だから, $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ となり, r, θ を a, b から求めることもできる.

$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\beta = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, (あるいは, $\alpha = r e^{i\theta}$, $\beta = \rho e^{i\varphi}$) について,

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} r = \rho \\ \theta = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases} \quad \text{とくに,} \quad \alpha = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0 \text{ であり,} \\ \arg 0 \text{ は定義できない.}$$

偏角には, $2k\pi$ の不定性がある.

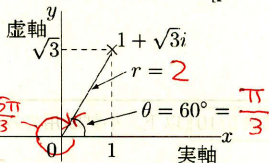
4a $1 + \sqrt{3}i$ を極形式で表せ.

[p.121 問 7]

[解] 右図より $1 + \sqrt{3}i$ の絶対値 $r = 2$, 偏角 $\theta = \frac{\pi}{3}$ だから, $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

また, 偏角の不定性があるので, 偏角 $\theta = -\frac{5\pi}{3}$ とみる

$$\text{と, } 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos(-\frac{5\pi}{3}) + i \sin(-\frac{5\pi}{3})) = 2(\cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3}) = 2e^{-i\frac{5\pi}{3}}$$

4b $\alpha\beta = r e^{i\theta} \rho e^{i\varphi} = r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$, $|\alpha\beta| = r\rho = |\alpha||\beta|$, $\arg(\alpha\beta) = \theta + \varphi = \arg \alpha + \arg \beta$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r e^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\varphi)}, \quad \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| = \frac{r}{\rho} = \frac{|\alpha|}{|\beta|}, \quad \arg\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \theta - \varphi = \arg \alpha - \arg \beta$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

[p.121—122]

[解] 上の 2 行は極形式の積と商である. $\alpha_k = r_k(\cos \theta_k + i \sin \theta_k) = r_k e^{i\theta_k}$, ($k = 1, 2, \dots, n$) として, 3 行目の式を示す. n 個の複素数の積を極形式で考える.

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)}, \quad \text{特に, } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta},$$

のとき, $\overbrace{\alpha \alpha \cdots \alpha}^n = \overbrace{r r \cdots r}^n e^{i(\overbrace{\theta + \theta + \cdots + \theta}^n)}$, $\alpha^n = r^n e^{in\theta}$, $(r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$,

$r^n (e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$. よって, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ あるいは, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$, ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). これを ド・モアブルの定理 (de Moivre's theorem) という.

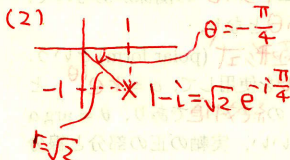
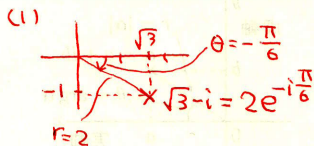
4c 次の複素数 (1)(2) を複素平面上に描き、極

形式を求めよ. (1) $\sqrt{3}-i$ (2) $1-i$

この結果を使って、次を計算し、極形式を求めよ.

(3) $(1-i)(\sqrt{3}-i)$

(4) $(1-i)^4$ (5) $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}$



(3) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

(4) $(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^4 = (\sqrt{2})^4 (e^{-i\frac{\pi}{4}})^4 = 4e^{-i\frac{\pi}{4} \times 4} = 4e^{-i\pi}$

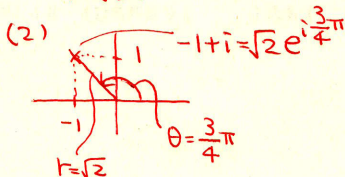
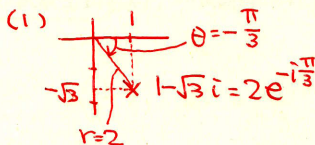
(5) $\frac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

(1) $1-\sqrt{3}i$ (2) $-1+i$ 極形式

(3) $(-1+i)(1-\sqrt{3}i)$

(4) $(-1+i)^5$

(5) $\frac{-1+i}{1-\sqrt{3}i}$



(3) $\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \cdot 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3})} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$

(4) $(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^5 = (\sqrt{2})^5 (e^{i\frac{3\pi}{4}})^5 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{15\pi}{4}}$

(5) $\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}$