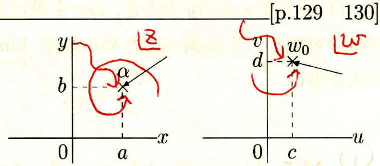
複素関数の極限 $\lim_{z\to\alpha} f(z)=w_0$ が存在

[p.129 130]

「 $w=f(z)$ について，z 平面で z が α に近づくにつれて，その経路のいかんにかかわらず，w 平面で w が 1 つの定まった値 w_0 に限りなく近づくこと」[右図に描画せよ].
記号では，$f(z)\to w_0$,　$(z\to\alpha)$ とも書く.



複素関数の微分

[p.133—135]

$w=f(z)$ が点 z で微分可能 (differentiable) であることは，極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ が確定して存在すること．このとき，この極限が導関数 (derivative) $\dfrac{df}{dz}=f'(z)$ になる.

$w=f(z)$ が領域 D で正則 (holomorphic, regular) であることとは，領域 D のすべての点 z で $w=f(z)$ が微分可能であること．このとき，$w=f(z)$ を正則関数(holomorphic function, regular function) または解析関数(analytic function) という.

$$\Delta z^2=(z+\Delta z)^2-z^2=\cancel{z^2}+2z\Delta z+(\Delta z)^2-\cancel{z^2}=2z\Delta z+(\Delta z)^2$$

$$\therefore (z^2)'=\frac{dz^2}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(2z+\Delta z)=2z$$

$$\Delta\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z+\Delta z}-\frac{1}{z}=\frac{z-(z+\Delta z)}{(z+\Delta z)z}=\frac{-\Delta z}{(z+\Delta z)z}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{z}\right)'=\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\Delta\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{-1}{(z+\Delta z)z}=-\frac{1}{z^2}$$

7a 複素関数 $w=2x+iy$ は微分可能でないことを示せ.

[p.135 例題 2]

[解] $z=x+iy$, $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$,
$\Delta w=2(x+\Delta x)+i(y+\Delta y)-(2x+iy)=2\Delta x+i\Delta y$

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{2\Delta x+i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$

経路① $\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y=0\ (\text{直線}, \Delta x\ \text{軸})\end{cases}$　経路② $\begin{cases}\Delta y\to 0\\ \Delta x=0\ (\text{直線}, \Delta y\ \text{軸})\end{cases}$

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ ①}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ (\Delta y=0)}}\frac{2\Delta x+\cancel{i0}}{\Delta x+\cancel{i0}}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2$$

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ ②}}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ (\Delta x=0)}}\frac{\cancel{0}+i\Delta y}{\cancel{0}+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}1=1$$

$\therefore \displaystyle\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ ①}}\frac{\Delta w}{\Delta z}\neq\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ ②}}\frac{\Delta w}{\Delta z}$．経路①②によって値が異なるので，

極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}$ は存在しない．この関数 w は微分可能でない.

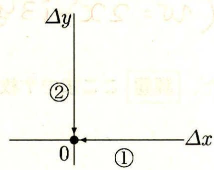


図 7(a)：Δz 平面

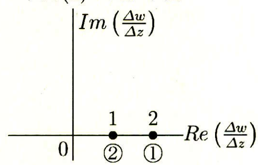


図 7(b)：$\frac{\Delta w}{\Delta z}$ 平面

関連問題 [p.135 問 2 例題 2][p.134 問 1][p.135 1. 2.]

7b (1) $w = \overline{z} = x - iy$ のとき，Δw を書いて，w が微分可能かどうか調べるための極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ の式を書け．

(2) この極限が存在しないことを示すための Δz 平面上の極限の経路を描け．

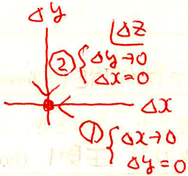
(3) 前問の経路で計算して，この極限が存在しないことを説明して，w が微分可能でないことを示せ．

(1) $\Delta w = \{(\cancel{x} + \Delta x) - i(\cancel{y} + \Delta y)\} - (\cancel{x} - i\cancel{y})$

$= \Delta x - i\Delta y$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

(2)



(3) $$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ①}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta y = 0)}} \frac{\Delta x - i0}{\Delta x + i0} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ②}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ (\Delta x = 0)}} \frac{0 - i\Delta y}{0 + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-1) = -1$$

$\displaystyle\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ①}} \frac{\Delta w}{\Delta z} \neq \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ②}} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ 経路①②によって値が異なり，

極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ が存在しない．w は微分可能でない．