関連問題 [p.117 問 2][p.118 問 3 問 4]

2a $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ として，

(a) $\overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ $\quad\because \overline{\alpha\beta} = \cdots = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = (ac-bd)-i(ad+bc)$

$$\overline{\alpha}\,\overline{\beta} = (a-ib)(c-id) = ac-aid-ibc+i^2bd = (ac-bd)-i(ad+bc)$$

(b) $\alpha\overline{\beta} - \overline{\alpha}\beta = (a+ib)(c-id)-(a-ib)(c+id) = ac$
$= (\cancel{ac}-aid+ibc-\cancel{i^2bd}) - (\cancel{ac}+aid-ibc-\cancel{i^2bd}) = 2i(bc-ad)$ 純虚数

絶対値 (absolute value) $|\alpha|$ 　　絶対値とは？

[p.116]

$\alpha = a + ib$ に対して　　$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$

[p.117—118]

実数 a 　$|a| = \sqrt{a^2}$

$\alpha\overline{\alpha} = (a+ib)(a-ib)$ 　　$\therefore |\alpha|^2 = \alpha\overline{\alpha}$ 　　$\therefore |\alpha| = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$
$= a^2 - i^2b^2 = a^2+b^2$

$|\alpha| = 0$ 　$\sqrt{a^2+b^2} = 0$ 　$a=0, b=0$ $\therefore \alpha = 0$

[p.117]

$|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$ 　　　$|\alpha - \beta| \geqq \big||\alpha|-|\beta|\big| \geqq |\alpha|-|\beta|$

$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ 　　　$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

[p.118]

関連問題 [p.117 問 2][p.118 問 3 問 4]

2b $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ として，

(a) $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ $\quad\because \left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \cdots = \left|\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2 + \left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2+\cancel{2acbd}+b^2d^2+b^2c^2-\cancel{2bcad}+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

(b) $|Re(\alpha)| \leqq |\alpha|$ $\quad\because |Re(\alpha)| = |a| = \sqrt{a^2}$ 　　$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$ 　　$b^2 \geqq 0$ だから

複素 (数) 平面 (complex plane) 　複素平面とは？

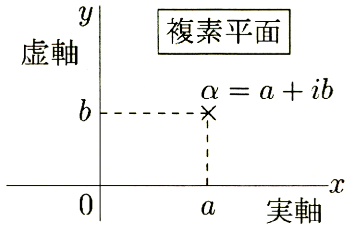
[p.118—119]

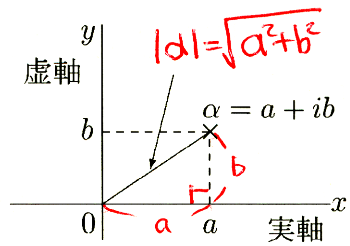
「実数 a $\Leftrightarrow$ 直線上の点 a 」

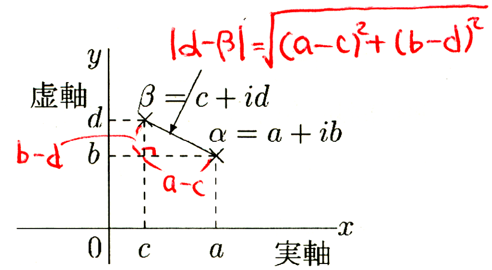
「複素数 $\alpha = a + ib$ $\Leftrightarrow$ 直交座標での平面上の点 (a, b) あるいは点 $\alpha = a+ib$ 」

この平面を複素(数)平面(complex (number) plane)，あるいはガウス平面(Gaussian plane)

実部 a を表す横軸 (x 軸) を実軸 (real axis)，虚部 b を表す縦軸 (y 軸) を虚軸 (imaginary axis) という．また，この場合，この平面を z 平面ともいう．







絶対値 $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$ は, 原点O と点 α の間の距離を表す.

絶対値 $|\alpha-\beta| = |(a-c)+i(b-d)| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ $(=|\beta-\alpha|)$ は, 点 α と 点 β の間の距離.

2c 三角不等式 $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$, $|\alpha-\beta| \geqq |\alpha|-|\beta|$. [p.119]

[解] 右の三角不等式を示す. 図 2-1 の三角形で, 点 0 から点 α への移動距離を考えると, $|\beta|+|\alpha-\beta| \geqq |\alpha|$. $\therefore$ $|\alpha-\beta| \geqq |\alpha|-|\beta|$. ‖ 問 左の三角不等式も示せ.

関連問題 [p.119 問 6][p.132 6.]

2d (a) $|z-1| = 2$ (b) $|z| = Im(z)+1$ [p.119, p.132]

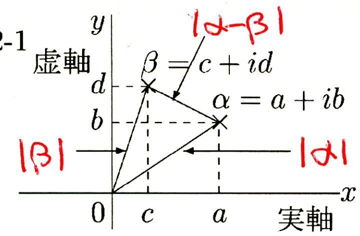
$z=x+iy$ とする (実変数 x, y). (a) $|(x+iy)-1|=2$, $\therefore |(x-1)+iy|=2$,

$\therefore \sqrt{(x-1)^2+y^2}=2$ $\therefore (x-1)^2+y^2=2^2$. これは中心 $z=1$, 半径 2 の円.

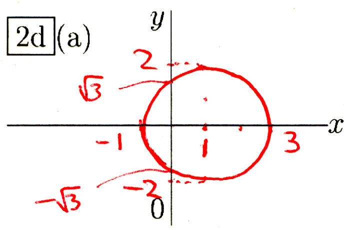
(b) $|x+iy| = Im(x+iy)+1$, $\therefore \sqrt{x^2+y^2}=y+1$ $\therefore x^2+\cancel{y^2}=\cancel{y^2}+2y+1$

$\therefore x^2=2y+1$ $\therefore y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$ これは 放物線

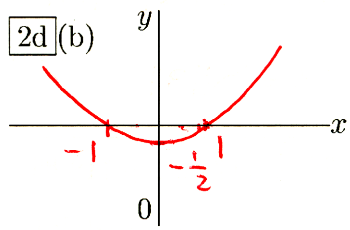
図 2-1



2d (a)



2d (b)



$|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$

$|\alpha\beta| = |(a+ib)(c+id)| = |ac+aid+ibc+i^2bd| = |(ac-bd)+i(ad+bc)|$

$= \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{a^2c^2\cancel{-2acbd}+b^2d^2+a^2d^2\cancel{+2adbc}+b^2c^2} = \sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$

$|\alpha||\beta| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = \sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}$

$|Im(\alpha)| \leqq |\alpha|$

$|Im(\alpha)| = |b| = \sqrt{b^2}$

$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$ $a^2 \geqq 0$ だから

$\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta} = (a-ib)(c+id)+(a+ib)(c-id)$

$= (ac+\cancel{aid}\cancel{-ibc}-i^2bd)+(ac\cancel{-aid}\cancel{+ibc}-i^2bd) = 2(ac+bd)$