極形式 (polar form) $|\alpha|$ 　極形式とは？ 偏角とは？

[p.120—122]

極形式　平面の上で，直交座標での点 (a, b) と極座標での点 (r, θ) には，$a =$ $r\cos\theta$，$b =$ $r\sin\theta$ の関係があるので，$\alpha = a + ib =$ $r\cos\theta + i\,r\sin\theta$ となり，$\alpha =$ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ を α の 極形式 (polar form) という．オイラーの公式 $e^{i\theta} =$ $\cos\theta + i\sin\theta$ を使用して，$\alpha =$ $re^{i\theta}$ とも書く．ここで，$r = |\alpha|$ は α の 絶対値 であり，$\theta = \arg\alpha$ は α の 偏角 (argument) といい，実軸の正の部分と線分 $O\alpha$ が作る角度で，反時計回りが正である．

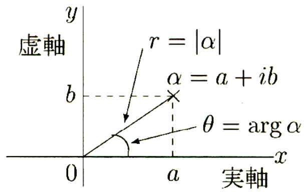


図 4-1：極形式

$\alpha = |\alpha|(\cos\arg\alpha + i\sin\arg\alpha)$，あるいは，$\alpha = |\alpha|e^{i\arg\alpha}$ とも書ける．$r = |\alpha| =$ $\sqrt{a^2 + b^2}$ ，であり，そして，$\dfrac{b}{a} = \dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} =$ $\tan\theta$ だから，$\theta =$ $\tan^{-1}\dfrac{b}{a}$ となり，r, θ を a, b から求めることもできる．

$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $\beta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,（あるいは，$\alpha = re^{i\theta}$, $\beta = \rho e^{i\varphi}$）について，

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} r = \rho \\ \theta = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \end{cases}$$

とくに，$\alpha = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = 0$ であり，$\arg 0$ は定義できない．

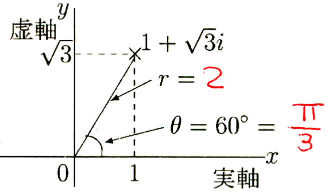
偏角には，$2k\pi$ の不定性がある．

3a　$1 + \sqrt{3}i$, を極形式で表せ．

[p.121 問 7]

[解] 右図より $1 + \sqrt{3}i$ の絶対値 $r =$ 2 ，偏角 $\theta =$ $\dfrac{\pi}{3}$ だから，$1 + \sqrt{3}i =$ $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ $=$ $2e^{i\frac{\pi}{3}}$

また，偏角の不定性があるので，偏角 $\theta = -\frac{5\pi}{3}$ とみると，$1 + \sqrt{3}i =$ $2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{3}}$



3b　$\alpha\beta = re^{i\theta}\rho e^{i\varphi} =$ $r\rho e^{i(\theta+\varphi)}$，$|\alpha\beta| = r\rho =$ $|\alpha||\beta|$ ，$\arg(\alpha\beta) = \theta + \varphi =$ $\arg\alpha + \arg\beta$

$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{re^{i\theta}}{\rho e^{i\varphi}} =$ $\dfrac{r}{\rho}e^{i(\theta-\varphi)}$ ，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{r}{\rho} =$ $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ ，$\arg\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) = \theta - \varphi =$ $\arg\alpha - \arg\beta$

$(e^{i\theta})^n =$ $e^{in\theta}$ ，$(\cos\theta + i\sin\theta)^n =$ $\cos n\theta + i\sin n\theta$，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

[p.121—122]

[解] 上の 2 行は極形式の積と商である．$\alpha_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$ として，3 行目の式を示す．n 個の複素数の積を極形式で考える．

$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = r_1 r_2 \cdots r_n e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$, 特に，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$,

のとき，$\overbrace{\alpha\alpha\cdots\alpha}^{n} = \overbrace{rr\cdots r}^{n}\, e^{i\overbrace{(\theta+\theta+\cdots+\theta)}^{n}}$，$\alpha^n = r^n e^{i(n\theta)}$，$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$,

$r^n\left(e^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$. よって，$\left(e^{i\theta}\right)^n =$ $e^{in\theta}$ あるいは，$(\cos\theta + i\sin\theta)^n =$ $\cos n\theta + i\sin n\theta$ ，$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. これを ド・モアブルの定理 (de Moivre's theorem) という．

α の n 乗根　$w^n = \alpha$ を満たす解 w

[p.123—125]

$w\left(= \alpha^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\exp\left(i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$　$\boxed{注}$：$\alpha^{\frac{1}{n}}$ は n 個ある．

$$w\left(= \alpha^{\frac{1}{n}}\right) = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right\}, \qquad (k = \overbrace{0, 1, 2, \cdots, n-1}^{n\text{ 個}})$$

関連問題 [p.121 問 7][p.131 2. 3.][p.121 問 8 問 9 p.122 問 10] [p.132 8, 11]

3c 次の複素数 (1)(2) を複素平面上に描き，極形式を求めよ． (1) $\sqrt{3}-i$ (2) $1-i$
この結果を使って，次を計算し，極形式を求めよ．

(3) $(1-i)(\sqrt{3}-i)$

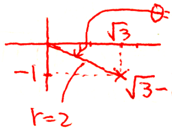
(4) $(1-i)^4$ (5) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i}$

関連問題 [p.125 1.][p.131 4.]

3d (1) 複素数 $\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ を複素平面上に描き，極形式を求めよ．
(2) $\sqrt{2}+\sqrt{6}i$ の 4 乗根 w が満たす方程式を書き，$w=\rho e^{i\phi}$ とおき，その方程式を極形式に直せ．

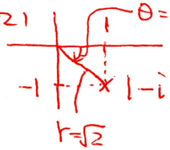
(3) w の絶対値と偏角を求め，w を極形式ですべて求めよ．
(4) w を複素平面上に描き，通常の $a+ib$ の形で表せる数はその形に直せ．

$\boxed{3c}$ (1)



$\sqrt{3}-i=2e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(2)



$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

(3) $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\cdot 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$
$=2\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})}$
$=2\sqrt{2}e^{-i\frac{5}{12}\pi}$

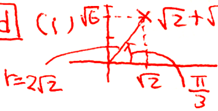
$-\frac{5}{12}$

$\frac{1}{12}$

(4) $(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^4=(\sqrt{2})^4e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 4}=4e^{-i\pi}$

(5) $\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}e^{i(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$\boxed{3d}$ (1)



$\sqrt{2}+\sqrt{6}i=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

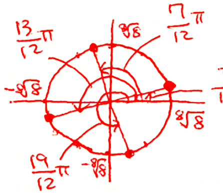
(2) $w^4=\sqrt{2}+\sqrt{6}i$
$\rho^4e^{i4\phi}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}$

(3) $\begin{cases}\rho^4=2\sqrt{2}=8^{\frac{1}{2}}\\ 4\phi=\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

$\begin{cases}\rho=\sqrt[8]{8}\\ \phi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\end{cases}$ $(k=0,1,2,3)$

$w=\begin{cases}\sqrt[8]{8}e^{i\frac{\pi}{12}}\\ \sqrt[8]{8}e^{i\frac{7}{12}\pi}\\ \sqrt[8]{8}e^{i\frac{13}{12}\pi}\\ \sqrt[8]{8}e^{i\frac{19}{12}\pi}\end{cases}$

(4)

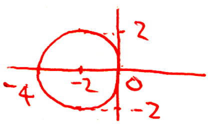


$|z+2|=2$

$|x+iy+2|=2$ $\quad|(x+2)+iy|=2$ $\quad\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2$

$(x+2)^2+y^2=2^2$

中心 $(-2,0)$ 半径 2 の円



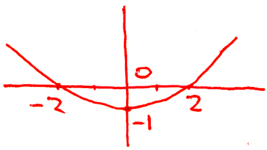
$|z|=\mathrm{Im}(z)+2$

$|x+iy|=\mathrm{Im}(x+iy)+2$ $\quad\sqrt{x^2+y^2}=y+2$

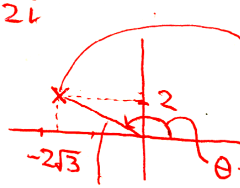
$x^2+\cancel{y^2}=\cancel{y^2}+4y+4$

$4y=x^2-4$

$y=\frac{1}{4}x^2-1$ 放物線



$-2\sqrt{3}+2i$



$-2\sqrt{3}+2i=4(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi)$
$=4e^{i\frac{5}{6}\pi}$

$\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$

$r=2\times2=4$