複素関数

[p.128—129]

x, y が 実変数(real variables) であるとき，$z = x+iy$ を複素変数(complex variable) という．実関数(real function) $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ が x, y の関数であるとき，$w = u+iv$ を z の複素関数(complex function) という．また，$w = f(z)$ とも書く．

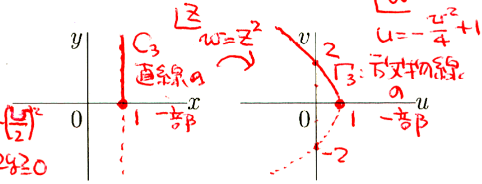
z は独立変数(independent variable)，w は従属変数(dependent variable) でもある．

また，複素関数 $w = f(z)$ は z 平面での図形を w 平面での図形に写す．

例 $w = z^2$ は z 平面上の図形 $C_3 : x = 1,\ y \geqq 0$ を w 平面上の図形 $\Gamma_3 : v^2 = -4u + 4,\ v \geqq 0$ に写す．

$w = z^2$

$C_3 : \begin{cases} x=1 & ① \\ y \geqq 0 \end{cases}$　$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$ ②　①を②に代入 $\begin{cases} u = 1^2 - y^2 \\ v = 2 \cdot 1 \cdot y \end{cases}$ yを消去　$\Gamma_3 \begin{cases} u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 \\ v = 2y \geqq 0 \end{cases}$



関連問題 [p.131 5.][p.132 7. 12.]

4a 次の関数 $w = u + iv$ の u, v を x, y で表せ．$(z = x + iy)$

(1) $w = z\bar{z} + z - \bar{z}$　(2) $w = \dfrac{z}{z+1}$

(1) $w = (x+iy)(x-iy) + (\cancel{x}+iy) - (\cancel{x}-iy)$
$= x^2 - i^2y^2 + 2iy = x^2+y^2+i2y$

$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = 2y \end{cases}$

(2) $w = \dfrac{x+iy}{x+iy+1} = \dfrac{x+iy}{(x+1)+iy} = \dfrac{x+iy}{(x+1)+iy} \cdot \dfrac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}$

$= \dfrac{x(x+1) - i\cancel{xy} + iy(\cancel{x}+1) - i^2y^2}{(x+1)^2 - i^2y^2}$

$= \dfrac{x(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2} + i\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$

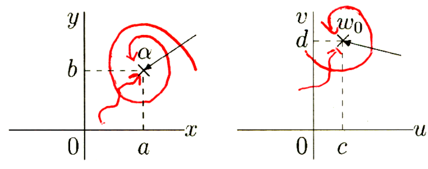
$\begin{cases} u = \dfrac{x(x+1)+y^2}{(x+1)^2+y^2} \\ v = \dfrac{y}{(x+1)^2+y^2} \end{cases}$

複素関数の極限 $\lim_{z\to\alpha} f(z) = w_0$ が存在

[p.129—130]

「$w = f(z)$ について，z 平面で z が α に近づくにつれて，その経路のいかんにかかわらず，w 平面で w が 1 つの定まった値 w_0 に限りなく近づくこと」[右図に描画せよ]．

記号では，$f(z) \to w_0$，$(z \to \alpha)$ とも書く．



複素関数の微分

[p.133—135]

$w = f(z)$ が点 z で微分可能(differentiable) であることは，極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ が確定して存在すること．このとき，この極限が導関数(derivative) $\dfrac{df}{dz} = f'(z)$ になる．

$w = f(z)$ が 領域 D で 正則 (holomorphic, regular) であることとは，領域 D のすべての点 z で $w = f(z)$ が微分可能であること．このとき，$w = f(z)$ を正則関数(holomorphic function, regular function) または解析関数(analytic function) という．

関連問題 [p.135 問 2 例題 2][p.134 問 1][p.135 1. 2.]

4b (1) $w = \bar{z} = x - iy$ のとき，Δw を書いて，w が微分可能かどうか調べるための極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ の式を書け．

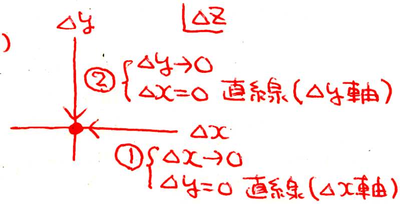
(2) この極限が存在しないことを示すための Δz 平面上の極限の経路を描け．

(3) 前問の経路で計算して，この極限が存在しないことを説明して，w が微分可能でないことを示せ．

(1)

$$\Delta w = \left((\cancel{x}+\Delta x) - i(\cancel{y}+\Delta y)\right) - (\cancel{x} - i\cancel{y})$$
$$= \Delta x - i\Delta y$$
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

(2)



(3)
$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ①}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta y = 0)}} \frac{\Delta x - i\cancel{0}}{\Delta x + i\cancel{0}} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ②}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ (\Delta x = 0)}} \frac{0 - i\Delta y}{0 + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-1) = -1$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ①}} \frac{\Delta w}{\Delta z} \neq \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ②}} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

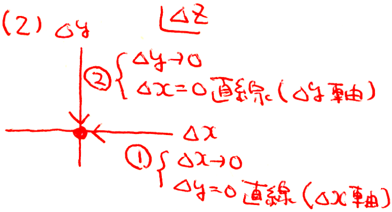
経路①,②によって値が異なるので

極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ は存在しない．wは微分可能でない．

$w = 3x - i2y$

$$\Delta w = \left(3(\cancel{x}+\Delta x) - i2(\cancel{y}+\Delta y)\right) - (3\cancel{x} - i2\cancel{y})$$
$$= 3\Delta x - i2\Delta y$$
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{3\Delta x - i2\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$$

(2)



(3)
$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ①}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta y = 0)}} \frac{3\Delta x - i0}{\Delta x + i0} = \lim_{\Delta x \to 0} 3 = 3$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ②}} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta y \to 0 \\ (\Delta x = 0)}} \frac{0 - i2\Delta y}{0 + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} (-2) = -2$$

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ①}} \frac{\Delta w}{\Delta z} \neq \lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ ②}} \frac{\Delta w}{\Delta z}$$

経路①,②によって値が異なるので

極限 $\displaystyle\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ は存在しない

wは微分可能でない．