Cauchy-Riemann の方程式, 正則

[p.128—129]

(i) $f(z)=u+iv$ が 正則 であること.　　　(i), (ii) は同値または必要十分条件

(ii) $f(z)=u+iv$ について, u, v の偏導関数 u_x, u_y, v_x, v_y が連続であり, $u_x=v_y$, $v_x=-u_y$ が成立

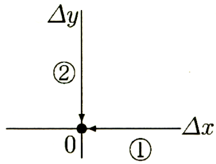
(ii) の 2 つの式 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}$ を コーシー–リーマンの方程式(Cauchy-Riemann equations)

(i) → (ii) を示す.　複素関数 $w=f(z)$ が正則であることとは, (領域 D のすべての点 z で) 極限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ が確定して存在することである. ($\Delta f = f(z+\Delta z)-f(z)$)

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\{u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)\}-\{u(x,y)+iv(x,y)\}}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$=\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}+i\frac{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

経路① $\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y=0\ (\text{直線},\ \Delta x\ \text{軸})\end{cases}$　経路② $\begin{cases}\Delta y\to 0\\ \Delta x=0\ (\text{直線},\ \Delta y\ \text{軸})\end{cases}$



$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ ①}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta y=0)}}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta y=0)}}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}=u_x+iv_x$$

$$\lim_{\substack{\Delta z\to 0\\ ②}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\(\Delta x=0)}}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}+i\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\(\Delta x=0)}}\frac{v(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\Delta y}=\frac{1}{i}u_y+v_y=v_y-iu_y$$

正則より $\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ ①}}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta z\to 0\\ ②}}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ だから　$u_x=v_y$,　$v_x=-u_y$　‖

$\boxed{注}$ (ii) → (i) は教科書を参照. 極限より導関数は $f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$ である.

6a　次の複素関数 (1) (2) は正則か. 正則ならば, $f'(z)$ を求め, f, f' を z で表せ.

(1) $f(z)=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$　(2) $f(z)=(x^2-y^2-2xy)+i(x^2-y^2+2xy)$

[p.138 例題 1, 2]

[解] (1) $u=\frac{x}{x^2+y^2}$,　$v=-\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$u_x=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad v_x=-\frac{-y\cdot(2x+0)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$u_y=\frac{-x\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad v_y=-\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot(0+2y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$u_x=v_y\ \left[=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$, $v_x=-u_y\ \left[=\frac{+2xy}{(x^2+y^2)^2}\right]$ より, $w=u+iv$ は 正則 である.

$$f'(z)=u_x+iv_x=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}+i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f(z)=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{\cancel{x-iy}}{\cancel{(x-iy)}(x+iy)}=\frac{1}{x+iy}=\frac{1}{z},\qquad f'(z)=\left(\frac{1}{z}\right)'=(z^{-1})'=-z^{-2}=-\frac{1}{z^2}$$

(2) $u=x^2-y^2-2xy$,　$v=x^2-y^2+2xy$,

$u_x=2x-0-2\cdot1\cdot y=2x-2y$,　$v_x=2x-0+2\cdot1\cdot y=2x+2y$,

$u_y=0-2y-2\cdot x\cdot 1=-2y-2x=-(2x+2y)$,　$v_y=0-2y+2\cdot x\cdot 1=2x-2y$,

$u_x=v_y\,(=2x-2y)$,　$v_x=-u_y\,(=2x+2y)$ より $w=u+iv$ は 正則 である.

$f'(z)=u_x+iv_x=(2x-2y)+i(2x+2y)=2(x+iy)+2i(x+iy)=2z+2iz=(2+2i)z$

$f(z)=\int(2+2i)z\,dz=\left[(2+2i)\frac{z^2}{2}\right]=(1+i)z^2$

関連問題 [p.138 例題 1, 例題 2][p.139 1., 2.][p.151 演習問題 2., 3., 4.]

関連 [p.151 演習問題 1., 5., 6., 7., 8., 9.—16.]

6b (1) $w = (x^2-y^2+y)+i(2xy-x)$ の実部 u と虚部 v の偏微分 u_x, u_y, v_x, v_y を計算せよ.
(2) この w が正則かどうか, コーシー・リーマンの方程式により調べよ. また, 正則ならば, 導関数 w' を求めよ. さらに, この w' と w を z で表せ.

---

(1) $u = x^2-y^2+y$ $\quad v = 2xy-x$

$u_x = 2x$ $\quad v_x = 2y-1$

$u_y = -2y+1$ $\quad v_y = 2x$

(2) $u_x = v_y\ (=2x)$, $v_x = -u_y\ (=2y-1)$ だから, $w=u+iv$ は正則 //

$w' = u_x + iv_x = 2x+i(2y-1)$ //

$= 2(x+iy)-i = 2z-i$ //

$w = \int (2z-i)dz = [z^2-iz] = z^2-iz$ //

$w = (-x^2+y^2+2y)+i(-2xy-2x)$

(1) $u = -x^2+y^2+2y$ $\quad v = -2xy-2x$

$u_x = -2x$ $\quad v_x = -2y-2$

$u_y = 2y+2$ $\quad v_y = -2x$ //

(2) $u_x = v_y\ (=-2x)$ $\quad v_x = -u_y\ (=-2y-2)$ だから // $w=u+iv$ は 正則 //

$w' = u_x + iv_x = -2x+i(-2y-2)$ //

$= -2(x+iy)-2i = -2z-2i$ //

$w = \int (-2z-2i)dz = [-z^2-2iz] = -z^2-2iz$ //