調和関数

[p.139]

$f(z)=u+iv$ が正則ならば, $u_{xx}+u_{yy}=0$ $v_{xx}+v_{yy}=0$ (u, v は調和関数(harmonic function))

注 $u_{xx}=(u_x)_x=(v_y)_x=v_{yx}=v_{xy}=(v_x)_y=(-u_y)_y=-u_{yy}$ $\therefore u_{xx}+u_{yy}=0$ //

$v_{xx}=(v_x)_x=(-u_y)_x=-u_{yx}=-u_{xy}=-(u_x)_y=-(v_y)_y=-v_{yy}$ $\therefore v_{xx}+v_{yy}=0$ //

基本的な正則関数

[p.140—p.152]

指数関数 (exponential function) $e^z=e^x\cos y+i\,e^x\sin y$ は正則.

($\because$ コーシー・リーマンの方程式が成立.) $(e^z)'=e^z$ //

e^z の周期は $2\pi i$ $\Leftrightarrow$ $e^{(z+2\pi i)}=e^z$

注 オイラーの公式より $e^z=e^{(x+iy)}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ //

三角関数 (trigonometric function) $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ は正則.

($\because$ 指数関数の和差で定義.) $(\cos z)'=-\sin z$ // $(\sin z)'=\cos z$ //

$\cos z$ と $\sin z$ の周期は 2π $\Leftrightarrow$ $\cos(z+2\pi)=\cos z$, $\sin(z+2\pi)=\sin z$ //

$(\cos z)'=$ 注 $\left(\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)'=\dfrac{(e^{iz})'+(e^{-iz})'}{2}=\dfrac{ie^{iz}-ie^{-iz}}{2}=\dfrac{i^2(e^{iz}-e^{-iz})}{2i}=-\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=-\sin z$ //

$\cos(z+2\pi)=\dfrac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2}=\dfrac{e^{iz}e^{2\pi i}+e^{-iz}e^{-2\pi i}}{2}=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\cos z$ // $\leftarrow$ ($e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$, $e^{-2\pi i}=\cos 2\pi-i\sin 2\pi=1$)

双曲線関数 (hyperbolic function) $\cosh z=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\sinh z=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}$ は正則.

($\because$ 指数関数の和差で定義.) $(\cosh z)'=\sinh z$ // $(\sinh z)'=\cosh z$ //

$\cosh z$ と $\sinh z$ の周期は $2\pi i$ $\Leftrightarrow$ $\cosh(z+2\pi i)=\cosh z$, $\sinh(z+2\pi i)=\sinh z$

$(\cosh z)'=$ 注 $\left(\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}\right)'=\dfrac{(e^z)'+(e^{-z})'}{2}=\dfrac{e^z-e^{-z}}{2}=\sinh z$ //

$\cosh(z+2\pi i)=\dfrac{e^{(z+2\pi i)}+e^{-(z+2\pi i)}}{2}=\dfrac{e^ze^{2\pi i}+e^{-z}e^{-2\pi i}}{2}=\dfrac{e^z+e^{-z}}{2}=\cosh z$ //

三角関数と双曲線関数の関係

注 $\cos(iz)=\cosh z$, $\sin(iz)=i\sinh z$, $\cosh(iz)=\cos z$, $\sinh(iz)=i\sin z$

対数関数 (logarithmic function) $w=\log z$ は正則.

($\because$ 指数関数 $w=e^z$ の逆関数.) $(\log z)'=\dfrac{1}{z}$ //

$z=re^{i\theta}$ のとき,

$\log z=\mathrm{Log}\,r+i(\theta+2k\pi)$, $(k=0,\pm1,\cdots)$. (無限) 多価関数. ($\because$ 周期関数の逆関数.)

三角関数の逆関数 $w=\sin^{-1}z$ は正則.

($\because$ 三角関数 $w=\sin z$ の逆関数.) $(\sin^{-1}z)'=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$\sin^{-1}z=\dfrac{1}{i}\log\{iz\pm\sqrt{1-z^2}\}$ 注 $w=\cos^{-1}z$ も同様.

関連問題 [p.150 1. 2. 3.][p.151 演習問題 1. 5. 6. 7. 8.]

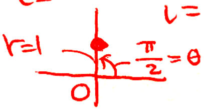
7 $u+iv$ の形に表せ.　(1) $e^{i\left(\frac{\pi}{3}+3i\right)}$　(2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+3i\right)$　(3) $\log i$　(4) $\sin^{-1}1$

---

(1) $$e^{i\frac{\pi}{3}-3}=e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-3}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)e^{-3}=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-3}\ /\!/$$

(2) $$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(3i)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(3i)$$
$$=\frac{1}{2}\cosh 3+i\frac{\sqrt{3}}{2}\sinh 3\ /\!/$$

(3) $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ だから



$$\log i=\overset{0}{\mathrm{Log}\,1}+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$$
$$=i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(4) $$\sin^{-1}1=\frac{1}{i}\log\left(i\cdot1\pm\sqrt{1-1^2}\right)=\frac{1}{i}\log i$$
$$=\frac{\pi}{2}+2k\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

---

(1) $$e^{i\left(\frac{\pi}{2}+4i\right)}=e^{i\frac{\pi}{2}-4}=e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-4}=\left(\overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}+i\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)e^{-4}=ie^{-4}\ /\!/$$

(2) $$\cos\left(\frac{\pi}{4}+5i\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos(5i)-\sin\frac{\pi}{4}\sin(5i)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cosh 5-i\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh 5\ /\!/$$