条件付き確率 (conditional probability)

$$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \qquad\qquad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

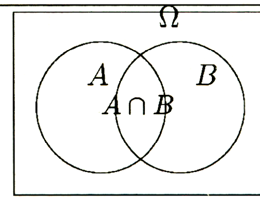
A が起こったという条件のもとで
B が起こる事象の条件付き確率

B が起こったという条件のもとで
A が起こる事象の条件付き確率

[p.18 19]

注 $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$,

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A\cap B)}{\cancel{n(\Omega)}}}{\frac{n(A)}{\cancel{n(\Omega)}}} = \frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$



乗法定理 (multiplication theorem) — 積事象 $A\cap B$ の確率

$P(A\cap B) = P(A)P(B|A)$ $\qquad$ $P(A\cap B) = P(B)P(A|B)$

注 A, B が互いに独立 (independent) であるとき $P(A\cap B) = P(A)P(B)$

[p.19]

事象の独立 (independence)

[p.19—20]

$P(B|A) = P(B)$ B は A に独立 $\qquad$ $P(A|B) = P(A)$ A は B に独立

$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B)$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$

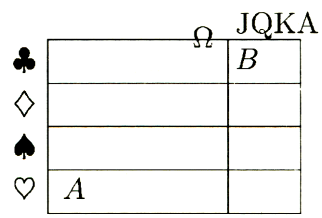
$\Updownarrow$ $\qquad\qquad$ $\Updownarrow$

$P(A\cap B) = P(A)P(B)$ $\quad$ A, B は独立

例 B は A に独立, A は B に独立.

$P(B|A) = P(B) = \dfrac{4}{13}$, $\quad P(A|B) = P(A) = \dfrac{1}{4}$.

また 2 より, $P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{13} = \dfrac{1}{13} = P(A\cap B)$.



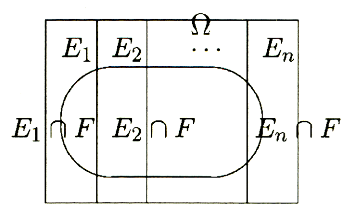
ベイズ (Bayes) の定理

1 つの試行を行うとき，互いに排反な事象 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ のどれかが必ず起こり，ある事象 F について，$P(E_k|F) = \dfrac{P(E_k\cap F)}{P(F)} = \dfrac{P(E_k)P(F|E_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(F|E_i)}$ $\quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

が成立する. 注 $P(F) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(F|E_i)$ が成立することを以下に示す.

$E_1\cap F, E_2\cap F, \cdots, E_n\cap F$ は互いに排反であり，
$F = (E_1\cap F)\cup(E_2\cap F)\cup\cdots\cup(E_n\cap F)$ であるから，
確率の公理 (III) より

$$P(F) = P(E_1\cap F) + P(E_2\cap F) + \cdots + P(E_n\cap F)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i\cap F) \qquad \text{確率の乗法定理より}$$



$$P(F) = P(E_1)P(F|E_1) + P(E_2)P(F|E_2) + \cdots + P(E_n)P(F|E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(F|E_i) \quad ||$$

$\boxed{注}$ $P(E_1), P(E_2), \cdots, P(E_n)$ は事前確率, $P(E_1|F), P(E_2|F), \cdots, P(E_n|F)$ は事後確率.

$\boxed{注}$ $P(F|E_1) \neq P(F \cap E_1)$ であることを両辺の意味から考えると良い.

関連問題 [p.20 4.][p.21 5. 7. 10. 11.]

3 トランプカード52枚のうち, エース(A) キング(K), クイーン(Q), ジャック(J) の4種類を絵札とする. 1枚のカードを取り出すことを考える.

(1) 全事象 Ω の場合の数を求めて, スペードである事象 A と, 絵札である事象 B の場合の数と確率をそれぞれ求めよ.

(2) スペードの絵札である事象の場合の数と確率を求めよ.

(3) 条件付き確率の定義により, スペードであると分かったとき, 絵札である確率を求めよ.

(4) 同様に, 絵札であると分かったとき, スペードである確率を求めよ.

(4) A と B は独立か調べよ.

(1) $n(\Omega)=52$

$n(A)=13 \quad P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4} \qquad n(B)=4\times4=16 \quad P(B)=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$

(2) $A\cap B=\{♠K, ♠Q, ♠J, ♠A\} \quad n(A\cap B)=4 \quad P(A\cap B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$

(3) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{\cancel{52}}}{\frac{13}{\cancel{52}}}=\frac{4}{13}$

(4) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{\cancel{52}}}{\frac{16}{\cancel{52}}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$

(5) $P(A)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}=\frac{1}{13}=P(A\cap B)$ A, Bは互いに独立

---

(1) $n(\Omega)=53$

$n(A)=13 \quad P(A)=\frac{13}{53} \qquad n(B)=4\times3=12 \quad P(B)=\frac{12}{53}$

(2) $A\cap B=\{♠K, ♠Q, ♠J\} \quad n(A\cap B)=3 \quad P(A\cap B)=\frac{3}{53}$

(3) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{\cancel{53}}}{\frac{13}{\cancel{53}}}=\frac{3}{13}$

(4) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{\cancel{53}}}{\frac{12}{\cancel{53}}}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

(5) $P(A)P(B)=\frac{13}{53}\times\frac{12}{53}=\frac{156}{53^2}\neq\frac{159}{53^2}=\frac{3}{53}=P(A\cap B)$

A, Bは独立でない.