補足　平方根と立方根

平方根

多くの皆さんは平方根とかルート (根号) のことを知っていると思います. そういう人はこのセクションを飛ばして下さい.

$x^2 = a$ を満たす x, 即ち 2 乗 (平方) して a になる数を a の平方根といいます.

[例]　4 の平方根は 2 と -2, 9 の平方根は 3 と -3 です. これらをそれぞれ ± 2, ± 3 と書きます.

では, 2 の平方根はどうでしょう. 2 の平方根は整数や分数で表せません. しかし, $x = 1.4142\cdots$ というふうにして無限に続く少数を考えれば $x^2 = 2$ とできます. この実数を書き表わすためにルート (根号) が考えられました. つまり,

2 の平方根は $\pm\sqrt{2}$　$(\sqrt{2} = 1.4142\cdots)$

です. 結局, $a \geqq 0$ ならば a の平方根は $\pm\sqrt{a}$ と書き表せます.

複素数

$a < 0$ のとき a の平方根, 即ち $x^2 = a$ となる実数は存在しません. しかし, 例えば 2 次方程式 $x^2 - 2x + 5 = 0$ の解は解の公式より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \end{aligned}$$

のように解の中に -16 の平方根が表れます. 実際には存在しないけれども, 負の数の平方根も用いる方が便利なことがあるようです.

$$\begin{aligned} \sqrt{-16} &= \sqrt{(-1) \times 16} \\ &= \sqrt{-1} \times \sqrt{16} \\ &= \sqrt{-1} \times 4 \\ &= 4\sqrt{-1} \end{aligned}$$

と変形できるので, 以後

$$\sqrt{-1} = i$$

と書き表わすことにして

$$\sqrt{-16} = 4i$$

と表します．すると $x^2 - 2x + 5 = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm 4i}{2} \\ &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

と表せます．このように $a + bi$ $(a, b$ は実数, $b \neq 0)$ の形の数を虚数といいます．今までの実際に存在する数を実数といいます．$a + bi$ の形で $b = 0$ の場合を考えるとちょうど実数になるので, $a + bi$ $(a, b$ は実数, $)$ の形の数の全体は実数と虚数を両方とも含んだ集合になるのでこの形の数を複素数といいます．複素数の計算では $i = \sqrt{-1}$ なので, 計算の途中で i^2 が表れたときは -1 で置き換えます．すると

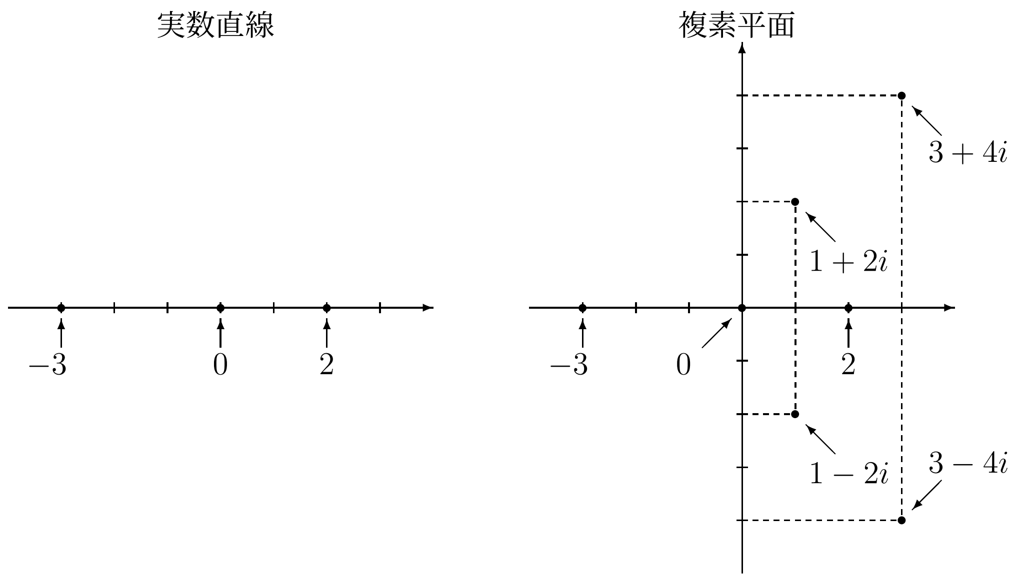
$$\begin{aligned} (1+2i)(3-4i) &= 1 \times 3 + 1 \times (-4i) + 2i \times 3 + 2i \times (-4i) \\ &= 3 - 4i + 6i - 8i^2 \\ &= 3 - 4i + 6i - 8 \times (-1) \\ &= 11 + 2i \\ \frac{1+2i}{3-4i} &= \frac{(1+2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} \\ &= \frac{3 + 4i + 6i + 8i^2}{9 - 16i^2} \\ &= \frac{3 + 4i + 6i - 8}{9 + 16} \\ &= \frac{-5 + 10i}{25} \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

となります．このように, 複素数どうしの計算は足し算, 引き算はもちろんのこと掛け算, 割算をしても, また, 複素数になります．上の $3 - 4i$ と $3 + 4i$ のように実数の部分 (実部といいます) は同じで, i に係っている数 (虚部といいます) が互いに $\pm$ の符号が反対になっている複素数を複素共役といいます．$1 + 2i$ の複素共役は $1 - 2i$ です．互いに (複素) 共役な 2 つの複素数は加えても掛けても実数になるという性質をもっています．実数については i に係っている数 (虚部) が 0 なので複素共役は自分自身です．

$$\begin{aligned} (3+4i) + (3-4i) &= 6 \\ (3+4i)(3-4i) &= 9 + 12i - 12i - 16i^2 \\ &= 9 - 16 \times (-1) \\ &= 25 \\ (1+2i) + (1-2i) &= 2 \\ (1+2i)(1-2i) &= 1 + 2i - 2i - 4i^2 \\ &= 1 - 4 \times (-1) \\ &= 5 \end{aligned}$$

一般に複素数に広げて考えれば (係数が複素数でもいいです), 3 次方程式であろうと 4 次方程式であろうと, どんな高次の方程式でもすべての (3 次方程式なら 3 個, 4 次方程式なら 4 個, n 次

方程式なら n 個の) 解が見つかることが解っています. 実数を係数とする方程式については, すべて複素共役で置き換えても (実数は変わらないので), 方程式自体は変わりません. それで, 1 つの複素数が解になると, その複素共役も同じ方程式の解となります.　実数の全体は直線 (実数直線) によって表します. 一方, 複素数の全体は図のように平面 (複素平面) によって表します. 図のように $1+2i$ と $1-2i$, $3+4i$ と $3-4i$ のような互いに (複素) 共役な複素数は実数でできている直線 (x 軸にあたるもの, 実軸といいます), に関して対称です.



立方根

2 乗 (平方) して a になる数を a の平方根といいました. これに対して $x^3=a$ を満たす x, 即ち, 3 乗 (立方) して a になる数を a の立方根といいます.

[例]　8 の立方根は 2, -27 の立方根は -3 です. 2 の立方根は $\sqrt[3]{2}$ と書きます. ($\sqrt[3]{2}=1.25992\cdots$)

ここまでは実数の範囲の話でした. ところで, 複素数の範囲では 3 次方程式には 3 個の解があるので, 例えば, $x^3=2$ の解は 3 個あるはずです.

$$x=\sqrt[3]{2}t$$

と置くと

$$\begin{aligned} x^3 &= (\sqrt[3]{2}t)^3 \\ &= (\sqrt[3]{2})^3 t^3 \\ &= 2t^3 \end{aligned}$$

と変形できるので, $x^3=2$ の解を得るためには, $t^3=1$ の解, 即ち 1 の立方根が得られればよいことになります.

$$t^3=1 \Rightarrow t^3-1=0$$

$$t^3-1=(t-1)(t^2+t+1)$$

と因数分解できるので, 1 の立方根の内で 1 以外のものは

$$t^2+t+1=0$$

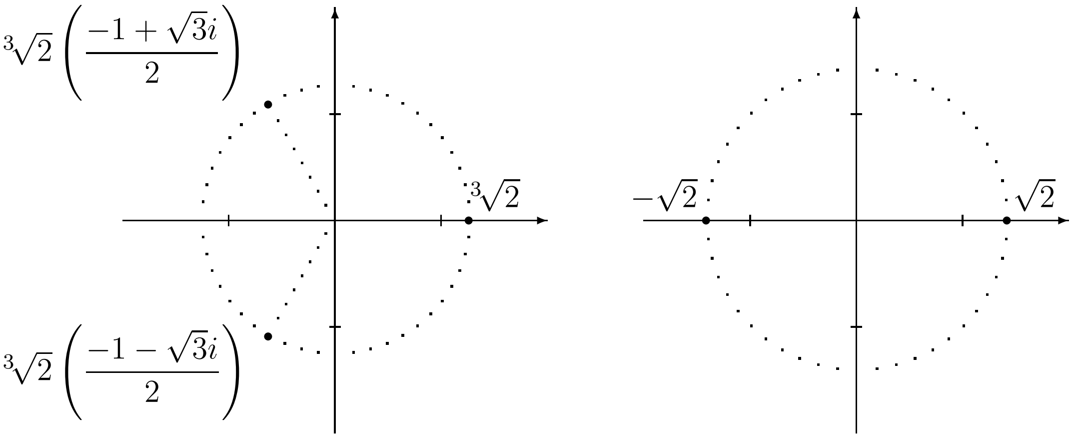
の解です．2 次方程式の解の公式により，この解は

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

となります．従って 2 の立方根は

$$x = \sqrt[3]{2}, \quad \sqrt[3]{2}\left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}\right)$$

です．これを複素平面に表すと



となります．これは原点 (0 の点) を中心とする半径 $\sqrt[3]{2}$ の円の 3 等分点になります．2 の平方根 $(\pm\sqrt{2})$ の 2 点は原点 (0 の点) について対称な点になるので，複素平面では原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円の 2 等分点になります．このように，複素平面では，平方根は円の 2 等分点，立方根は円の 3 等分点，一般に n 乗根は n 等分点になります．